# Planches HEC

## Sujet Maths appliquées 3

**Exercice avec préparation 1**

$A$ et $B$ sont deux sacs qui contiennent chacun deux boules portant le numéro 1 ou le numéro 0. Une expérience consiste à tirer simultanément une boule de chaque sac et à la replacer dans l'autre sac.
On part des sacs $A_0$ contenant deux boules marquées 1 et $B_0$ contenant deux boules marquées 0 et on définit par récurrence la suite de sacs $A_n$, $B_n$ par : l'expérience appliquée à $A_n$, $B_n$ donne $A_{n+1}$, $B_{n+1}$.
$S_n$ [resp. $T_n$] est la variable aléatoire égale à la somme des numéros sur les boules de $A_n$ [resp. $B_n$] ($n \in \mathbb{N}$).

*1.* *a)* **Cours.** Loi d'une variable aléatoire discrète finie.

*b)* *i)* Ecrire le code d'une fonction `echange(A,B)` qui prend en entrée les sacs $A$ et $B$, représentés sous forme de liste à deux éléments, et qui renvoie la nouvelle composition de sacs après échange aléatoire d'une boule de $A$ et d'une boule de $B$.

*ii)* Ecrire le code d'une fonction `simuleS(n)` qui prend en entrée un entier `n` et réalise une simulation de la variable aléatoire $S_n$.

*2.* *a)* Que valent $S_0$ et $S_1$ ? Expliciter la loi de $S_2$.

*b)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p_n = \mathbb{P}(S_n = 0)$. Expliciter la loi de $S_n$ en fonction de $p_n$ et calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$. Ce résultat était-il prévisible ? Comparer $\mathbb{V}(S_n)$ et $\mathbb{V}(T_n)$. Exprimer $\mathbb{V}(S_n)$ en fonction de $p_n$.

*c)* Pour $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation de récurrence entre $p_{n+1}$ et $p_n$, et en déduire $p_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter la loi de $S_n$ en fonction de $n$.

*3.* Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*a)* Pour $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, comment le produit $ME$ se déduit-il de $M$ ? Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n E = A^n$.

*b)* En utilisant les résultats précédents, calculer $A^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

---

**Exercice sans préparation 1**

Soit $n$ un entier $\geqslant 6$. Les $n$ cadres d'une entreprise soit s'apprécient mutuellement, soit se détestent mutuellement. On peut schématiser la situation par un graphe non orienté simple dont les sommets « sont » les cadres et où les arêtes matérialisent les relations d'estime réciproque. Ici, ne pas s'estimer mutuellement équivaut à se détester mutuellement.

*1.* Chaque cadre dresse la liste des collègues qu'il apprécie.

*a)* Montrer que si on fait deux tas selon la parité de chaque liste, celui des listes contenant un nombre impair de noms contient un nombre pair de listes.

*b)* Montrer qu'il existe au moins deux listes ayant le même nombre de noms.

*2.* Pour mesurer l'impact des affinités sur le travail d'équipe, le DRH veut former un groupe de travail homogène de 3 de ces cadres. Montrer qu'il peut toujours soit réunir 3 personnes qui s'apprécient mutuellement, soit réunir 3 personnes qui se détestent mutuellement.

**Réponses de l'exercice avec préparation 1 :**

*1. a)* Soit $X$ une variable aléatoire discrète finie. La loi de $X$ est la donnée :

- de son univers image $X(\Omega)$ (ensemble des valeurs prises par $X$),
- et des probabilités $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

*b) i)* Proposons d'abord un programme **Python** utilisant une variable auxiliaire permettant de stocker le nombre que l'on supprime de la liste $A$ avant de le mettre dans la liste $B$.

```
def echange1(A,B):
    i = rd.randint(0,2)
    j = rd.randint(0,2)
    aux = A[i]
    A[i] = B[j]
    B[j] = aux
    return A,B
```

On peut cependant être plus efficace en utilisant une fonctionnalité **Python** de « double affectation » :

```
def echange2(A,B):
    i = rd.randint(0,2)
    j = rd.randint(0,2)
    A[i], B[j] = B[j], A[i]
    return A,B
```

*ii)* On propose la fonction **Python** suivante :

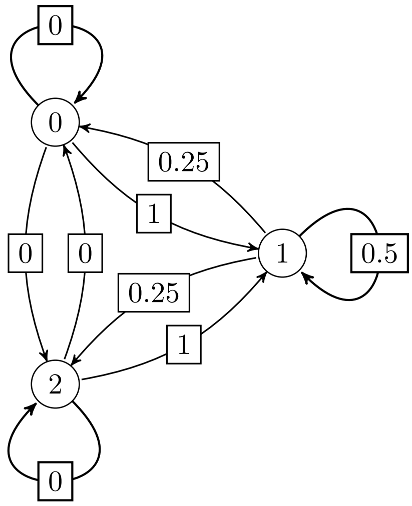
```
def simuleS(n):
    A = [1,1]
    B = [0,0]
    for k in range(n):
        A, B = echange2(A,B)
    return sum(A)
```

*2. a)*
- Tout d'abord : $S_0 = 2$ (c'est une variable aléatoire constante).
- Ensuite, il est certain qu'après un unique échange, les sacs $A$ et $B$ vont tous les deux contenir une boule 0 et une boule 1. Ainsi : $S_1 = 1$ (c'est également une variable aléatoire constante).
- D'après ce qui précède : $S_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Détaillons les différents événements :
  × L'événement $[S_2 = 0]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 1 dans le sac $A$ et la boule 0 dans le sac $B$. Ainsi (par équiprobabilité et par indépendance des deux tirages) : $\mathbb{P}([S_2 = 0]) = \dfrac{1}{4}$.
  × L'événement $[S_2 = 2]$ est réalisé si et seulement si on tire la boule 0 dans le sac $A$ et la boule 1 dans le sac $B$. Ainsi : $\mathbb{P}([S_2 = 0]) = \dfrac{1}{4}$.
  × L'événement $[S_2 = 1]$ est réalisé dans tous les autres cas (c'est-à-dire lorsque l'on tire le même numéro dans les deux sacs). Ainsi : $\mathbb{P}([S_2 = 1]) = \dfrac{1}{2}$.

*b)*
- Après un échange, la répartition des boules entre les deux sacs $A$ et $B$ est symétrique. Ainsi, il vient par symétrie : $\mathbb{P}([S_n = 2]) = \mathbb{P}([S_n = 0]) = p_n$. La famille $([S_n = i])_{i\in\{0,1,2\}}$ est un système complet d'événements donc : $\mathbb{P}([S_n = 1]) = 1 - 2p_n$. La variable aléatoire $S_n$ étant finie, elle admet une espérance et :

$$\boxed{\mathbb{E}(S_n) = 0 \times p_n + 1 \times (1 - 2p_n) + 2 \times p_n = 1.}$$

- Ce résultat était prévisible par symétrie de la répartition initiale et parce que 1 est la valeur moyenne entre 0 et 2 (les sacs ont autant de chance d'augmenter leur contenu de 1 que de le diminuer de 1 lorsqu'ils ont une position moyenne avec un 0 et un 1, mais lorsqu'ils sont sur une position extrémale ils doivent nécessairement revenir à la position moyenne). Remarquons que la suite $(S_n)$ est une chaîne de Markov et représentons là ci-dessous :




Par symétrie des rôles, $S_n$ et $T_n$ suivent la même loi (pour $n \geqslant 1$). D'où : $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(T_n)$ et $\mathbb{V}(S_n) = \mathbb{V}(T_n)$.
On remarque de plus que $S_n + T_n = 2$. On en déduit que $\mathbb{E}(S_n) + \mathbb{E}(T_n) = 2\,\mathbb{E}(S_n) = 2$. On retrouve ainsi : $\mathbb{E}(S_n) = 1$ (ce résultat était prévisible de plein de manières différentes, sans avoir à calculer la loi de $S_n$).

- D'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(S_n) &= \mathbb{E}(S_n^2) - \mathbb{E}(S_n)^2 \\ &= \left(0^2 \times p_n + 1^2 \times (1-2p_n) + 2^2 \times p_n\right) - 1^2 \\ &= 2p_n\end{aligned}$$

***c)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Remarquons que :

$$[S_{n+1} = 0] = [S_{n+1} = 0] \cap [S_n = 1]$$

(un sac ne peut contenir deux boules 0 que si il contenait à l'étape précédente une boule 0 et une boule 1).
D'après le graphe probabiliste associé à cette chaîne de Markov :

$$p_{n+1} = \mathbb{P}([S_n = 1])\mathbb{P}_{[S_n=1]}([S_{n+1} = 0]) = (1-2p_n)\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique et il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$$

Loi de $S_n$ :

| $i \in S_n(\Omega)$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}([S_n = i])$ | $\frac{1}{6}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$ | $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^n}{2^n}\right)$ | $\frac{1}{6}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right)$ |

***3.*** Notons, pour toute matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et tout entier $i \in \{1,2,3\}$, $C_i(N)$ la colonne numéro $i$ de $N$.

***a)*** On a :

$$C_1(ME) = ME\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = C_3(M)$$

$$C_2(ME) = ME\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = C_2(M)$$

$$C_3(ME) = ME\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = C_1(M)$$

Ainsi, la matrice $ME$ se déduit de $M$ en permutant les colonnes 1 et 3.
On remarque que les colonnes 1 et 3 de $A$ sont égales et donc $AE = A$. On montre alors par récurrence (immédiate, il suffit de multiplier à gauche par $A$ pour l'hérédité) :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^nE = A^n.}$$

***b)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$V_n = \big(\mathbb{P}(S_n = 0) \quad \mathbb{P}(S_n = 1) \quad \mathbb{P}(S_n = 2)\big) \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$$

le $n^{\text{e}}$ état probabiliste de la chaîne de Markov. On a en particulier :

$$V_0 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \textit{(car } S_0 = 2\textit{)}$$
$$V_1 = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \textit{(car } S_1 = 1\textit{)}$$

Posons $M = {}^tA$ la matrice de transition de cette chaîne de Markov. En appliquant la formule des probabilités totales, il vient :

$$V_{n+1} = V_nM$$

et par récurrence immédiate on obtient :

$$V_n = V_0M^n \qquad \text{et} \qquad V_{n+1} = V_1M^n$$

La première relation donne la troisième ligne de $M^n$ (et donc la troisième colonne de $A^n$) tandis que la deuxième relation donne la deuxième ligne de $M^n$ (et donc la deuxième colonne de $A^n$).
On en déduit que :

$$A^n = \begin{pmatrix} p_n & p_{n+1} & p_n \\ 1-2p_n & 1-2p_{n+1} & 1-2p_n \\ p_n & p_{n+1} & p_n \end{pmatrix}$$

ou, de manière explicite :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) & \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) & \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) \\ \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right) & \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right) & \frac{2}{3}\left(1-\frac{(-1)^n}{2^n}\right) \\ \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) & \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right) & \frac{1}{6}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right) \end{pmatrix}$$

**Réponses de l'exercice sans préparation 1 :**

***1.*** ***a)*** Il s'agit de la conséquence classique de la formule d'Euler.

Numérotons $0, 1, \dots, n-1$ les sommets du graphe et notons $a$ le nombre d'arêtes du graphe. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \deg(k) = 2a$$

Le terme de droite étant pair, il y a forcément un nombre pair de sommets de degré impair.

***b)*** Supposons que tous les sommets soient de degrés distincts. Il y a $n$ sommets et le degré d'un sommet est un nombre entier entre 0 et $n-1$. Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, il existe un unique sommet de degré $i$. En particulier :

- Il existe un sommet de degré 0, qui n'a aucun voisin.
- Il existe un sommet de degré $n-1$, voisin de tous les autres sommets.

C'est absurde.

***2.*** Soit $s$ un sommet fixé. Remarquons qu'il y a $n-1$ autres sommets et que $n-1 \geqslant 5$.

- Premier cas : $s$ admet au moins 3 voisins $i$, $j$ et $k$. Il y a deux possibilités :
  - × si deux de ces voisins sont reliés (par exemple $i$ et $j$), alors $\{s, i, j\}$ est un triangle de trois cadres qui s'apprécient,
  - × sinon, $\{i, j, k\}$ est un triangle de sommets sans arêtes, donc un groupe de 3 cadres qui se détestent.
- Deuxième cas : $s$ admet au plus 2 voisins. Il y a donc au moins 3 sommets $i$, $j$ et $k$ qui ne sont pas voisins de $s$. Il y a deux possibilités :
  - × si deux de ces voisins ne sont pas reliés (par exemple $i$ et $j$), alors $\{s, i, j\}$ est un groupe de trois cadres qui se détestent,
  - × sinon, $\{i, j, k\}$ est un triangle de sommets mutuellement reliés, donc un groupe de 3 cadres qui s'apprécient.