

Planches HEC

Sujet E5

Exercice avec préparation 1

1. **Question de cours** : Théorème de la bijection.

2. Déterminer l'ensemble D des réels x tels que : $e^x - e^{-x} > 0$.

On définit la fonction :

$$\begin{aligned} f &: D \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(e^x - e^{-x}) \end{aligned}$$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

3. a) Sans chercher à le calculer, prouver l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, et démontrer : $\alpha < 1$.

b) Compléter le programme **Python** suivant permettant d'avoir une valeur approchée par défaut de α à 0.01 près.

```

1  a = 0
2  b = 1
3  while _____
4      if _____
5          b = (a+b)/2
6      else:
7          a = (a+b)/2
8  print(a)

```

c) Calculer la valeur explicite de α .

4. a) Donner la position relative de la droite (Δ) d'équation $y = x$ par rapport à (C) .

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ et tracer sur un même graphe la courbe (C) et la droite (Δ) .

5. Soit λ un réel, on note g_λ la fonction définie par :

$$\begin{aligned} g_\lambda &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{\lambda}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \geq \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

a) On pose $h : x \mapsto f(x) - x$. Après avoir calculé $h'(x)$, déterminer λ en fonction de α pour que g_λ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X .

b) Donner la fonction de répartition G_λ de X .

6. Démontrer : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice sans préparation 1

Soit λ un réel strictement positif.

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ , définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On note $V = \max(X, 1 - X)$ le maximum de X et de $1 - X$, et l'on admet que V est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Déterminer $V(\Omega)$, l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire V .
2. Déterminer la fonction de répartition de V . V est-elle une variable aléatoire à densité ?

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur I . Si f est continue et strictement monotone, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 e^x - e^{-x} > 0 &\iff e^x > e^{-x} \\
 &\iff e^{2x} > 1 && \text{car } e^x > 0 \\
 &\iff 2x > 0 && (\text{par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\
 &\iff x > 0
 \end{aligned}$$

Donc

$$D =]0, +\infty[.$$

3. a) La fonction f est de la forme $f = g \circ h$ où

- $g : x \mapsto \ln(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$
- $h : x \mapsto e^x - e^{-x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h(]0, +\infty[) \subset]0, +\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

On a $e^x - e^{-x} > 0$ d'après la question 2 et $e^x + e^{-x} > 0$ donc $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. De plus, f est continue sur $]0, +\infty[$ car dérivable sur $]0, +\infty[$.

Ainsi, f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[)$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

Puisque $0 \in \mathbb{R}$, 0 admet donc un unique antécédent par f dans $]0, +\infty[$. Autrement dit, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, que l'on note α .

D'autre part, $f(1) = \ln(e^1 - e^{-1})$ donc

$$f(1) > 0 \iff e - e^{-1} > 1$$

Or, $e > 2$ et $e^{-1} < 1$ donc on a bien $e - e^{-1} > 1$.

Par stricte croissance de f sur $]0, +\infty[$, on peut bien conclure que

$$\alpha < 1.$$

- b) On reconnaît l'algorithme de dichotomie.

```

1  a = 0
2  b = 1
3  while b-a > 0.01:
4      if np.log(np.exp((a+b)/2) - np.exp(-(a+b)/2)) > 0:
5          b = (a+b)/2
6      else:
7          a = (a+b)/2
8  print(a)

```

- c) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff e^x - e^{-x} = 1 \\
 &\iff e^{2x} - e^x - 1 = 0 \\
 &\iff (e^x)^2 - e^x - 1 = 0
 \end{aligned}$$

On cherche ainsi les racines du polynôme $P(X) = X^2 - X - 1$.

$\Delta = 1 + 4 = 5$ donc les racines sont

$$y_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$$

On en déduit que

$$f(x) = 0 \iff e^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \iff x = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

D'où

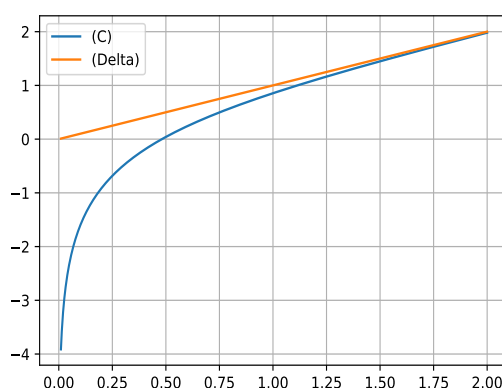
$$\alpha = \ln \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right).$$

4. a) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln(e^x - e^{-x}) - \ln(e^x) \\ &= \ln(e^x (1 - e^{-2x})) - \ln(e^x) \\ &= \ln(1 - e^{-2x}) < 0 \end{aligned}$$

Donc la droite (Δ) d'équation $y = x$ est au dessus de la courbe (C) .

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-2x}) = 0$



5. a) Il est clair que si $\lambda = 0$, la fonction g_λ n'est pas une densité. On suppose dans la suite que $\lambda \neq 0$. h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \frac{2}{e^{2x} - 1} = \frac{2}{\lambda} g_\lambda(x)$$

Analyse : Supposons que g_λ soit une densité. Alors $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x) dx = 1$.

Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x) dx &= \int_{\alpha}^{+\infty} g_\lambda(x) dx && (\text{car } g_\lambda \text{ est nulle en dehors de } [\alpha, +\infty[) \\ &= \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} h'(x) dx \end{aligned}$$

La fonction h' est continue sur $[\alpha, +\infty[$ donc l'intégrale $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} h'(x) dx$ est impropre en $+\infty$.
Soit $B > \alpha$.

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^B \frac{\lambda}{2} h'(x) dx &= \frac{\lambda}{2} \int_{\alpha}^B h'(x) dx \\ &= \frac{\lambda}{2} [h(x)]_{\alpha}^B \\ &= \frac{\lambda}{2} (h(B) - h(\alpha)) \end{aligned}$$

Or, $\lim_{B \rightarrow +\infty} h(B) = 0$ d'après la question 4.b), et $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha$. Donc l'intégrale $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} h'(x) dx$ converge et

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{\lambda}{2} h'(x) dx = \frac{\alpha\lambda}{2}$$

d'où

$$\lambda = \frac{2}{\alpha}.$$

Synthèse : Réciproquement, on vérifie facilement que pour $\lambda = \frac{2}{\alpha}$, la fonction g_{λ} est une densité :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_{\lambda}(x) \geq 0$
- g_{λ} est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en α
- $\int_{-\infty}^{+\infty} g_{\lambda}(x) dx = 1$

b) On peut considérer que $X(\Omega) = [\alpha, +\infty[$. D'après le calcul précédent,

$$G_{\lambda} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(h(x) + \alpha) & \text{si } x \geq \alpha \\ 0 & \text{si } x < \alpha \end{cases}$$

6. Tout d'abord, on fait un DL à l'ordre 2 :

$$e^x - e^{-x} = x + o_{x \rightarrow 0}(x) - (-x + o_{x \rightarrow 0}(x)) = 2x + o_{x \rightarrow 0}(x)$$

Ensuite, on écrit

$$f(x) = \ln\left(x \frac{e^x - e^{-x}}{x}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$$

et comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right) = \ln(2)$$

on en déduit que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x).$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. On remarque tout d'abord que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \geq 1 - x \iff x \geq \frac{1}{2} \quad (*)$$

On pose $g : x \mapsto \max(x, 1 - x)$, de sorte que $V = g(X)$.

On sait que $X(\Omega) = [0, +\infty[$. D'où $V(\Omega) = g([0, +\infty[)$.

D'après (*), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$.

On en déduit que g est décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

D'où : $V(\Omega) = [\frac{1}{2}, +\infty[$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

Premier cas : $x < \frac{1}{2}$.

Alors $F_V(x) = 0$.

Deuxième cas : $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} F_V(x) &= \mathbb{P}([V \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq x] \cap [1 - X \leq x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leq x] \cap [X \geq 1 - x]) \\ &= \mathbb{P}([1 - x \leq X \leq x]) && \text{(on a bien } x \geq 1 - x \text{ d'après } (*) \text{)} \\ &= F_X(x) - F_X(1 - x) && \text{(car } X \text{ est à densité)} \end{aligned}$$

- Premier sous-cas : $x \leq 1$.

Alors

$$\begin{aligned} F_V(x) &= (1 - e^{-\lambda x}) - (1 - e^{-\lambda(1-x)}) \\ &= e^{-\lambda(1-x)} - e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

- Deuxième sous-cas : $x > 1$.

Alors

$$F_V(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Conclusion :

$$F_V : x \mapsto \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 1 \\ e^{-\lambda(1-x)} - e^{-\lambda x} & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

La fonction F_V est continue sur $\mathbb{R}$ (c'est en particulier vrai en $\frac{1}{2}$ et en 1) et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé de $\frac{1}{2}$ et de 1. Donc

V est une variable aléatoire à densité.