Rappels de cours

Soit P un polynôme. On appelle *racine évidente de P* un entier $k \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ vérifiant $P(k)=0$.

Si k est une racine évidente de P, alors on peut factoriser $P(x)$ de la manière suivante :

$$P(x) = (x-k)Q(x)$$

où Q est un polynôme vérifiant : $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ est un trinôme du second degré (avec $a \neq 0$), le fait de trouver une racine évidente k de P permet de faire une factorisation « à vue » :

$$P(x) = (x-k)(ax-\alpha)$$

où α doit nécessairement vérifier la relation $k\alpha = c$, ce qui permet de calculer α de tête. La deuxième racine est alors α/a.

Si on ne trouve aucune racine évidente, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de P et trois cas se présentent.

- Si $\Delta > 0$, alors le polynôme P admet deux racines distinctes :

$$r_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$, alors le polynôme P admet une unique racine :

$$r = \frac{-b}{2a}$$

- Si $\Delta < 0$, alors le polynôme P n'admet aucune racine réelle.

Si $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ est un polynôme de degré 3 (avec $a \neq 0$), le fait de trouver une racine évidente k de P permet d'écrire une factorisation de la forme :

$$P(x) = (x-k)Q(x)$$

où $Q(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ est un trinôme du second degré que l'on détermine en développant $(x-k)Q(x)$ et en identifiant les coefficients avec ceux de P.

Il n'y a pas de formule à connaître pour les polynômes de degré 3 donc c'est la seule méthode à notre disposition pour factoriser $P(x)$.

1 Exercices

Exercice 1 : Factoriser les trinômes du second degré suivants en reconnaissant une identité remarquable.

1. $P(x) = x^2 - 2x + 1$
2. $P(x) = x^2 - 1$
3. $P(x) = x^2 + 2x + 1$
4. $P(x) = x^2 - 3$
5. $P(x) = x^2 + 4x + 4$
6. $P(x) = x^2 - 6x + 9$

Exercice 2 : Factoriser les trinômes du second degré suivants en trouvant une racine évidente.

1. $P(x) = x^2 + 2x$
2. $P(x) = x^2 + 2x - 3$
3. $P(x) = x^2 - 7x + 10$
4. $P(x) = x^2 + 5x + 4$
5. $P(x) = x^2 + 7x + 12$
6. $P(x) = 2x^2 - 7x + 3$

Exercice 3 : Factoriser les trinômes du second degré suivants (on cherchera d'abord une racine évidente, et si il n'y en a pas on appliquera les formules apprises au lycée).

1. $P(x) = x^2 + x - 1$
2. $P(x) = 2x^2 - 3x - 1$
3. $P(x) = x^2 - 5x$
4. $P(x) = x^2 + 3x + \frac{7}{4}$
5. $P(x) = x^2 + 4x + 3$
6. $P(x) = x^2 + 7x + 9$

Exercice 4 : Déterminer les racines des polynômes suivants, en discutant selon la valeur du paramètre m.

1. $P(x) = x^2 - mx + 1$
2. $P(x) = mx^2 + m^2x + m^3$
3. $P(x) = x^2 - (m+1)x + m^2$

Exercice 5 : Factoriser les polynômes de degré 3 suivants.

1. $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
2. $P(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$
3. $P(x) = x^3 - 2x - 4$

2 Corrections détaillées

Correction détaillée de l'exercice 1 :

1. $P(x) = (x-1)^2$
   (on reconnaît $a^2 - 2ab + b^2$)
2. $P(x) = (x-1)(x+1)$
   (on reconnaît $a^2 - b^2$)
3. $P(x) = (x+1)^2$
   (on reconnaît $a^2 + 2ab + b^2$)
4. $P(x) = (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$
   (on reconnaît $a^2 - b^2$)
5. $P(x) = (x+2)^2$
   (on reconnaît $a^2 + 2ab + b^2$)
6. $P(x) = (x-3)^2$
   (on reconnaît $a^2 - 2ab + b^2$)

Correction détaillée de l'exercice 2 :

1. $P(x) = x(x+2)$
   (pas de terme constant donc $P(0) = 0$ et on factorise par x)
2. $P(x) = (x-1)(x+3)$
   (on remarque que $P(1) = 0$)
3. $P(x) = (x-2)(x-5)$
   (on remarque que $P(2) = 0$)
4. $P(x) = (x+1)(x+4)$
   (on remarque que $P(-1) = 0$)
5. $P(x) = (x+3)(x+4)$
   (on remarque que $P(-3) = 0$)
6. $P(x) = (x-3)(2x-1)$
   (on remarque que $P(3) = 0$)

Correction détaillée de l'exercice 3 :

1. On ne trouve aucune racine évidente donc on calcule le discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$. Ainsi, le polynôme P admet deux racines distinctes :
   $$r_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
   On a alors la factorisation :
   $$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)$$
2. On ne trouve aucune racine évidente donc on calcule le discriminant $\Delta = 9 + 8 = 17$. Ainsi, le polynôme P admet deux racines distinctes :
   $$r_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4}$$
   On a alors la factorisation :
   $$P(x) = 2(x-r_1)(x-r_2)$$
Ne pas oublier le coefficient dominant dans la factorisation !
3. Le polynôme P n'a pas de coefficient constant donc on factorise par x :
   $$P(x) = x(x-5)$$
4. On ne trouve aucune racine évidente donc on calcule le discriminant $\Delta = 9 - 7 = 2$. Ainsi, le polynôme P admet deux racines distinctes :
   $$r_1 = \frac{-3-\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-3+\sqrt{2}}{2}$$
   On a alors la factorisation :
   $$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)$$
5. On remarque que $P(-1) = 0$. On a alors la factorisation :
   $$P(x) = (x+1)(x+3)$$
6. On ne trouve aucune racine évidente donc on calcule le discriminant $\Delta = 49 - 36 = 13$. Ainsi, le polynôme P admet deux racines distinctes :
   $$r_1 = \frac{-7-\sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-7+\sqrt{13}}{2}$$
   On a alors la factorisation :
   $$P(x) = (x-r_1)(x-r_2)$$

Correction détaillée de l'exercice 4 :

1. Calculons le discriminant : $\Delta = m^2 - 4$. Distinguons trois cas.
   - Si $m \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, alors $\Delta > 0$ et les racines de P sont :
   $$r_1 = \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$
   - Si $m = -2$ ou $m = 2$, alors $\Delta = 0$ et l'unique racine de P est :
   $$r = \frac{m}{2}$$
   - Si $m \in]-2, 2[$, alors $\Delta < 0$ et P n'admet aucune racine.
2. Distinguons deux cas.
   - Si $m = 0$, alors P est le polynôme nul.
   - Si $m \neq 0$, alors $\Delta = m^4 - 4m^4 = -3m^4 < 0$ et P n'admet aucune racine.
3. Calculons le discriminant : $\Delta = (m+1)^2 - 4m^2 = -3m^2 + 2m + 1$. On remarque que ce discriminant est un trinôme du second degré en m et que 1 est une racine évidente de ce trinôme. Ainsi, on a la factorisation :
   $$\Delta = (m-1)(-3m-1) = -3(m-1)\left(m + \frac{1}{3}\right)$$
   Distinguons trois cas.
   - Si $m \in]-\frac{1}{3}, 1[$, alors $\Delta > 0$ et les racines de P sont :
   $$r_1 = \frac{m + 1 - \sqrt{-3m^2 + 2m + 1}}{2} \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{m + 1 + \sqrt{-3m^2 + 2m + 1}}{2}$$
   - Si $m = -\frac{1}{3}$ ou $m = 1$, alors $\Delta = 0$ et l'unique racine de P est :
   $$r = \frac{m+1}{2}$$
   - Si $m \in]-\infty, -\frac{1}{3}[\cup]1, +\infty[$, alors $\Delta < 0$ et P n'admet aucune racine.

Correction détaillée de l'exercice 5 :

1. On remarque que $P(-1) = 0$. Ainsi :
   $$P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$$
   où a, b, c sont des réels à déterminer. De plus :
   - le coefficient dominant de P vaut 1, donc on trouve de tête que $a = 1$.
   - le coefficient constant de P vaut 1, donc on trouve de tête que $c = 1$.

   Pour trouver la valeur de b, on développe :
   $$(x+1)(x^2 + bx + 1) = x^3 + bx^2 + x + x^2 + bx + 1 = x^3 + (b+1)x^2 + (b+1)x + 1$$
   et en identifiant on trouve $b + 1 = 1$, c'est-à-dire $b = 0$.
   Finalement, la factorisation de $P(x)$ s'écrit :
   $$P(x) = (x+1)(x^2 + 1)$$
   (puisque le polynôme $x^2 + 1$ n'admet pas de racine)
2. On remarque que $P(1) = 0$. Ainsi :
   $$P(x) = (x-1)(x^2 + bx + 15)$$
   où b est un réel à déterminer. Pour trouver la valeur de b en gagnant du temps par rapport au corrigé de la question précédente, on calcule de tête le coefficient devant le terme x^2 et on identifie :
   $$-9 = b - 1 \iff b = -8$$
   D'où :
   $$P(x) = (x-1)(x^2 - 8x + 15)$$
   Le trinôme du second degré $Q(x) = x^2 - 8x + 15$ admet 3 comme racine évidente. Finalement, la factorisation de $P(x)$ s'écrit :
   $$P(x) = (x+1)(x-3)(x-5)$$

3. On remarque que $P(2) = 0$. Ainsi :
$$P(x) = (x-2)(x^2 + bx + 2)$$
où b est un réel à déterminer. On calcule de tête le coefficient devant le terme x^2 et on identifie :
$$0 = b - 2 \iff b = 2$$
D'où :
$$P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$$
Le trinôme du second degré $Q(x) = x^2 + 2x + 2$ admet $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$ comme discriminant et donc Q n'admet aucune racine. Finalement, la factorisation de $P(x)$ s'écrit :
$$P(x) = (x-1)(x^2 + 2x + 2)$$