Planches HEC

Sujet E02

Exercice avec préparation 1
Soit N un entier supérieur ou égal à 1.
On dispose de $2N$ boules blanches et de $2N$ boules noires, ainsi que de deux urnes vides, notées U_1 et U_2. On répartit les boules au hasard dans les deux urnes selon le protocole suivant : on place les boules blanches une par une, en choisissant l'urne au hasard de manière équiprobable, on place ensuite les boules noires de sorte que chaque urne contienne $2N$ boules.
L'expérience consiste alors à :

- tirer une boule au hasard dans U_1 et la placer dans U_2,
- puis tirer une boule au hasard dans U_2 et la placer dans U_1,
- et recommencer les deux étapes précédentes une infinité de fois.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n le nombre de boules blanches contenues dans U_1 après le n^{e} tirage.

1. **Question de cours** : Définition d'un schéma binomial.

2. Reconnaître la loi de X_0. Donner son espérance et sa variance.

3. ***a)*** Dans quelle urne s'effectuent les tirages impairs (c'est-à-dire les tirages numéros $1, 3, 5, \dots$) ? Combien de boules contient-elle avant et après le tirage ?

b) Même question pour les tirages pairs.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner $X_{2n+1}(\Omega)$ et $X_{2n}(\Omega)$.

5. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(i, j) \in X_{2n}(\Omega) \times X_{2n+1}(\Omega)$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+1} = j]) = \begin{cases} \frac{2N-i}{2N} & \text{si } j = i \\ \frac{i}{2N} & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(i, j) \in X_{2n+1}(\Omega) \times X_{2n+2}(\Omega)$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=i]}([X_{2n+2} = j]) = \begin{cases} \frac{2N-i}{2N+1} & \text{si } j = i + 1 \\ \frac{1+i}{2N+1} & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. La fonction **Python** suivante simule la variable aléatoire X_n pour une certaine configuration initiale des urnes. Expliquer ce qu'est cette configuration initiale des deux urnes (autrement dit quelle valeur prend X_0) et compléter cette fonction.

```
def simul_X(N, n):
    U1 = [0 for k in range(N)] + [1 for k in range(N)]
    U2 = [0 for k in range(N)] + [1 for k in range(N)]
    for k in range(1, n+1):
        if np.floor(k/2) == k/2: # Si k est pair
            indice = ________________________
            boule = U2[indice]
            del U2[indice]
            U1.append(boule)
        else: # Si k est impair
            indice = ______________________
            boule = U1[indice]
            del U1[indice]
            U2.append(boule)
    return ___________
```

7. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(i, j) \in X_{2n}(\Omega) \times X_{2n+2}(\Omega)$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+2} = j]) = \frac{2N - i}{2N}\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=i]}([X_{2n+2} = j]) + \frac{i}{2N}\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=i-1]}([X_{2n+2} = j])$$

puis que

$$\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+2} = j]) = \frac{1}{2N(2N+1)} \times \begin{cases} i^2 & \text{si } j = i - 1 \\ 2N + 4Ni - 2i^2 & \text{si } j = i \\ 4N^2 - 4Ni + i^2 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Déduire de la question précédente qu'il existe deux réels a et b (que l'on explicitera) tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}(X_{2n+2}) = a\mathbb{E}(X_{2n}) + b$$

c) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{2n})$.

Exercice sans préparation 1

Soit G un graphe non orienté simple à $2p$ sommets (où $p \in \mathbb{N}^*$).

1. Écrire une fonction **Python** `test(L)`, prenant en entrée la liste des listes d'adjacence d'un tel graphe G et renvoyant le booléen `True` si le degré de chaque sommet de G est au moins égal à p, ou le booléen `False` dans le cas contraire.

2. On suppose que le degré de chaque sommet de G est au moins égal à p. Démontrer que le graphe G est connexe.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Un schéma binomial est une répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques. La variables aléatoire qui compte le nombre de succès suit alors une loi binomiale.

2. Pour chaque boule blanche, il y a deux possibilités : soit on la place dans U_1, soit on la place dans U_2. Cette initialisation de l'expérience est alors une répétition de $2N$ épreuves de Bernoulli indépendantes et identiques, de même paramètre $p = \frac{1}{2}$. La variables aléatoire X_0 compte le nombre de succès (« on place la boule dans U_1 ») donc $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2N, \frac{1}{2}\right)$.

$$\mathbb{E}(X_0) = N \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{N}{2}$$

3. ***a)*** Les tirages impairs se font dans l'urne U_1, qui contient $2N$ boules avant le tirage et $2N-1$ boules après.

b) Les tirages pairs se font dans l'urne U_2, qui contient $2N+1$ boules avant le tirage et $2N$ boules après.

4. $X_{2n+1}(\Omega) = [\![0, 2N-1]\!]$ et $X_{2n}(\Omega) = [\![0, 2N]\!]$.

5. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(i, j) \in X_{2n}(\Omega) \times X_{2n+1}(\Omega)$.

On suppose l'événement $[X_{2n} = i]$ réalisé. Le tirage numéro $2n+1$ s'effectue donc dans l'urne U_1 qui contient i boules blanches et $2N - i$ boules noires. Dans ces conditions, on peut

- soit tirer une boule blanche et dans ce cas $[X_{2n+1} = i - 1]$ est réalisé. Cela arrive avec probabilité $\frac{i}{2N}$ (par équiprobabilité).
- soit tirer une boule noire et dans ce cas $[X_{2n+1} = i]$ est réalisé. Cela arrive avec probabilité $\frac{2N-i}{2N}$ (par équiprobabilité).

Autrement dit :

$$\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+1} = j]) = \begin{cases} \frac{2N-i}{2N} & \text{si } j = i \\ \frac{i}{2N} & \text{si } j = i - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(i, j) \in X_{2n+1}(\Omega) \times X_{2n+2}(\Omega)$.

On suppose l'événement $[X_{2n+1} = i]$ réalisé. Le tirage numéro $2n+2$ s'effectue donc dans l'urne U_2 qui contient $2N - i$ boules blanches et $i + 1$ boules noires. Dans ces conditions, on peut

- soit tirer une boule blanche et dans ce cas $[X_{2n+1} = i + 1]$ est réalisé. Cela arrive avec probabilité $\frac{2N-i}{2N+1}$ (par équiprobabilité).
- soit tirer une boule noire et dans ce cas $[X_{2n+1} = i]$ est réalisé. Cela arrive avec probabilité $\frac{1+i}{2N+1}$ (par équiprobabilité).

Autrement dit :

$$\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=i]}([X_{2n+2} = j]) = \begin{cases} \frac{2N-i}{2N+1} & \text{si } j = i + 1 \\ \frac{1+i}{2N+1} & \text{si } j = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

6. Dans la fonction **Python** proposée, U_1 et U_2 contiennent chacune N boules blanches et N boules noires initialement. On propose de compléter la fonction de la manière suivante :

```python
def simul_X(N, n):
    U1 = [0 for k in range(N)] + [1 for k in range(N)]
    U2 = [0 for k in range(N)] + [1 for k in range(N)]
    for k in range(1, n+1):
        if np.floor(k/2) == k/2: # Si k est pair
            indice = rd.randint(0, 2*N+1)
            boule = U2[indice]
            del U2[indice]
            U1.append(boule)
        else: # Si k est impair
            indice = rd.randint(0, 2*N)
            boule = U1[indice]
            del U1[indice]
            U2.append(boule)
    return sum(U1)
```

7. a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $(i, j) \in X_{2n}(\Omega) \times X_{2n+2}(\Omega)$.
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à X_{2n+1} : $([X_{2n+1} = k])_{k \in [\![0, 2N-1]\!]}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+2} = j]) &= \sum_{k=0}^{2N-1} \mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+1} = k] \cap [X_{2n+2} = j]) \\
&= \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{\mathbb{P}([X_{2n} = i] \cap [X_{2n+1} = k] \cap [X_{2n+2} = j])}{\mathbb{P}([X_{2n} = i])} \\
&= \sum_{k=0}^{2N-1} \frac{\cancel{\mathbb{P}([X_{2n} = i])}\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+1} = k])\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]\cap[X_{2n+1}=k]}([X_{2n+2} = j])}{\cancel{\mathbb{P}([X_{2n} = i])}} \\
&= \sum_{k=i-1}^{i} \mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+1} = k])\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=k]}([X_{2n+2} = j]) \\
&= \mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+1} = i])\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=i]}([X_{2n+2} = j]) \\
&\quad + \mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+1} = i-1])\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=i-1]}([X_{2n+2} = j]) \\
&= \frac{2N-i}{2N}\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=i]}([X_{2n+2} = j]) + \frac{i}{2N}\mathbb{P}_{[X_{2n+1}=i-1]}([X_{2n+2} = j])
\end{aligned}$$

On obtient ensuite la formule

$$\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+2} = j]) = \frac{1}{2N(2N+1)} \times \begin{cases} i^2 & \text{si } j = i-1 \\ 2N + 4Ni - 2i^2 & \text{si } j = i \\ 4N^2 - 4Ni + i^2 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

en appliquant les formules de la question ***5*** et en développant.

Commentaire

La suite (X_{2n}) est une chaîne de Markov homogène à $2N+1$ états.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les variables X_{2n+2} et X_{2n} sont finies donc admettent une espérance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{2n+2}) &= \sum_{j=0}^{2N} j\mathbb{P}([X_{2n+2=j}]) \\
&= \sum_{j=0}^{2N} j \sum_{i=0}^{2N} \mathbb{P}([X_{2n} = i])\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+2} = j]) && \textit{(FPT)} \\
&= \sum_{i=0}^{2N} \mathbb{P}([X_{2n} = i]) \sum_{j=0}^{2N} j\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+2} = j]) \\
&= \sum_{i=0}^{2N} \mathbb{P}([X_{2n} = i]) \sum_{j=i-1}^{i+1} j\mathbb{P}_{[X_{2n}=i]}([X_{2n+2} = j]) \\
&= \sum_{i=0}^{2N} \mathbb{P}([X_{2n} = i]) \frac{(i-1)i^2 + i(2N + 4Ni - 2i^2) + (i+1)(4N^2 - 4Ni + i^2)}{2N(2N+1)} \\
&= \sum_{i=0}^{2N} \frac{2N + (2N-1)i}{2N+1} \mathbb{P}([X_{2n} = i]) \\
&= \frac{2N-1}{2N+1} \sum_{i=0}^{2N} i\mathbb{P}([X_{2n} = i]) + \frac{2N}{2N+1} \sum_{i=0}^{2N} \mathbb{P}([X_{2n} = i]) \\
&= a\mathbb{E}(X_{2n}) + b
\end{aligned}$$

où $a = \dfrac{2N-1}{2N+1}$ et $b = \dfrac{2N}{2N+1}$.

c) La suite $\left(\mathbb{E}(X_{2n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique et a pour condition initiale $\mathbb{E}(X_0) = N$.
On remarque que $N = aN + b$ donc la suite $\left(\mathbb{E}(X_{2n})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à N.

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. On propose la fonction **Python** suivante.

```python
def test(L):
    n = len(L)
    p = n / 2
    for k in range(n):
        if len(L[k]) < p:
            return False
    return True
```

2. On raisonne par l'absurde. Supposons que le graphe G ne soit pas connexe.
Alors il existe x et y deux sommets de G qui ne sont reliés par aucun chemin. Par hypothèse, x a au moins p voisins (que l'on note $x_1, \dots, x_i$ avec $i \geqslant p$) et y a également au moins p voisins (que l'on note $y_1, \dots, y_j$ avec $j \geqslant p$). De plus,

- $\times$ $x \neq y$ (sinon x et y sont reliés par un chemin de longueur 0) ;
- $\times$ y n'est égal à aucun des voisins de x (sinon x et y sont reliés par un chemin de longueur 1) ;
- $\times$ de manière analogue, x n'est égal à aucun des voisins de y ;
- $\times$ aucun des voisins de y n'est égal à un des voisins de x (sinon x et y sont reliés par un chemin de longueur 2), autrement dit $\{x_1, \dots, x_i\}$ et $\{y_1, \dots, y_j\}$ sont disjoints.

On en déduit que $x, y, x_1, \dots, x_i, y_1, \dots, y_j$ sont deux à deux distincts. On a donc construit $2+i+j$ sommets distincts dans G. Or, $2 + i + j \geqslant 2 + 2p > n$. C'est absurde.