Planches HEC

Sujet Maths appliquées 7

Exercice avec préparation 1
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2.$$

On note $C = [-1,1] \times [-1,1]$, une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

1. Cours : Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Rappeler les conditions suffisantes pour que (x_0, y_0) soit un minimum local pour g.

2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur C.

3. Etudier la nature du point critique de f qui se trouve dans C.

4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur C.

5. Soit $\lambda > 1$. On s'intéresse à la ligne de niveau λ, notée L_λ, de la fonction f.

a) Déterminer deux fonctions φ_1 et φ_2 définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_1(x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_2(x)\}$$

b) Ecrire un code **Python** qui réalise le tracé des lignes de niveau L_λ pour $-4 \leqslant x \leqslant 4$ et $\lambda \in \{1,01; 1,2; 2,2; 3,2; 4,2\}$.

Exercice sans préparation 1
Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et admettant une variance notée σ^2. On suppose que leur loi a la propriété suivante : $X_1 + X_2$ a même loi que $\sqrt{2}X_1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires $X_1 + X_2 + \cdots + X_{2^n}$ et $\sqrt{2^n}X_1$ ont même loi.

2. En déduire la loi commune à toutes les variables de la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Si (x_0, y_0) est un point critique de g et si les valeurs propres de la hessienne de g au point (x_0, y_0) sont toutes les deux strictement positives, alors (x_0, y_0) est un minimum local pour g.

2. L'ensemble C est fermé et borné. De plus, la fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier f est continue sur C. On en déduit que f est bornée et atteint ses bornes sur C. Autrement dit, f admet un maximum et un minimum sur C.

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\partial_1(f)(x,y) &= -2xy + 2x = 2x(1-y)\\
\partial_2(f)(x,y) &= 2y - x^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} 2x(1-y) &= 0\\ 2y - x^2 &= 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x &= 0\\ 2y - x^2 &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= 1\\ 2y - x^2 &= 0 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x &= 0\\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= 1\\ x^2 &= 2 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x &= 0\\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= 1\\ x &= \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= 1\\ x &= -\sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

La fonction f admet donc trois points critiques dans $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$, $(\sqrt{2}, 1)$ et $(-\sqrt{2}, 1)$. Seul le point $(0,0)$ se trouve dans C.

De plus,

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1}(f)(x,y) &= 2 - 2y\\
\partial^2_{2,1}(f)(x,y) &= -2x\\
\partial^2_{1,2}(f)(x,y) &= -2x\\
\partial^2_{2,2}(f)(x,y) &= 2
\end{aligned}$$

Ainsi, la hessienne de f au point $(0,0)$ est la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. On en déduit que les valeurs propres de H sont toutes les deux strictement positives et donc $(0,0)$ est un minimum local.

4. • Remarquons que $f(0,0) = 0$. De plus, pour tout $(x, y) \in C$,

$$\begin{aligned}
x^2 y &\leqslant |x^2 y|\\
&= |x|^2\,|y|\\
&\leqslant |x|\,|y| && \textit{(car } |x| \in [0,1] \textit{ donc } |x|^2 \leqslant |x|\textit{)}\\
&\leqslant \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} && \textit{(par identité remarquable)}\\
&= \frac{x^2 + y^2}{2}
\end{aligned}$$

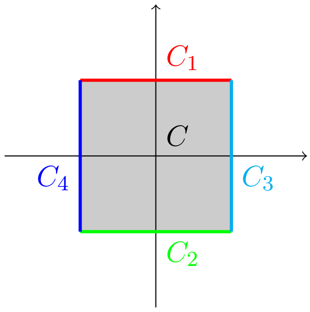
Expliquons l'identité remarquable. Cela vient du fait que $(|x| - |y|)^2 \geqslant 0$ et il ne reste qu'à développer cette expression.
On en déduit que, pour tout $(x, y) \in C$, $f(x, y) \geqslant 0 = f(0, 0)$.

$$\boxed{\text{Le point } (0,0) \text{ est un minimum global de } f \text{ sur } C \text{ et } \min_{(x,y)\in C} f(x,y) = 0.}$$

Commentaire

Ce n'est pas un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$ car $f(3, 2) = -5 < 0 = f(0, 0)$.

- Déterminons maintenant le maximum de f sur C. Il est nécessairement atteint sur un bord de C (sinon on aurait trouvé à la question *3* un point critique dans l'intérieur de C qui est un maximum local).
  On étudie donc la fonction f en restriction à chacun des bords de C.



× Sur le bord $C_1 = [-1, 1] \times \{1\}$, $f(x, y) = f(x, 1) = 1$, la fonction f est donc constante et $\max_{(x,y)\in C_1} f(x, y) = 1$.

× Sur le bord $C_2 = [-1, 1] \times \{-1\}$, $f(x, y) = f(x, -1) = 1 + 2x^2$. La fonction $h : x \mapsto 1 + 2x^2$ définie sur $[-1, 1]$ atteint son maximum en -1 et en 1. Ainsi, $\max_{(x,y)\in C_2} f(x, y) = 3$.

× Sur le bord $C_3 = \{1\} \times [-1, 1]$, $f(x, y) = f(1, y) = y^2 - y + 1$. L'étude (simple) de la fonction $h : y \mapsto y^2 - y + 1$ définie sur $[-1, 1]$ donne son tableau de variations :

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h	3	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1

Ainsi, $\max_{(x,y)\in C_3} f(x, y) = 3$.

× L'étude sur le bord $C_4 = \{-1\} \times [-1, 1]$ est identique à celle effectuée sur le bord C_3.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ atteint son maximum sur } C \text{ aux points } (-1,-1) \text{ et } (1,-1), \text{ et celui-ci vaut } 3.}$$

Commentaire

L'étude de f sur les bords de C permet aussi de montrer que le minimum global est atteint uniquement en $(0, 0)$. En effet, ce minimum global est atteint soit en $(0, 0)$ soit en un point du bord de C mais on peut constater que f ne prend que des valeurs strictement positives sur le bord de C.

5. Rappelons que $L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \lambda\}$.

a) Soit $\lambda > 1$ fixé. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Il s'agit d'exprimer y en fonction de x dans l'équation $y^2 - x^2y + x^2 - \lambda = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré en y (où x et λ sont des paramètres).
Son discriminant est : $\Delta_y = x^4 - 4(x^2 - \lambda) = x^4 - 4x^2 + 4\lambda$. On cherche le signe de Δ_y.
On remarque que Δ_y est un trinôme du second degré en x^2 (où λ est un paramètre).
Son discriminant est $\Delta_x = 16 - 16\lambda = 16(1 - \lambda) < 0$ par hypothèse sur λ.
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_y > 0$.
L'équation $y^2 - x^2y + x^2 - \lambda = 0$ admet donc deux solutions :

$$y_1 = \frac{x^2 + \sqrt{\Delta_y}}{2} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{x^2 - \sqrt{\Delta_y}}{2}$$

Les fonctions

$$\varphi_1 : x \mapsto \frac{x^2 + \sqrt{x^4 - 4(x^2 - \lambda)}}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : x \mapsto \frac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4(x^2 - \lambda)}}{2}$$

conviennent.

b) On propose le code suivant, qui trace de la même couleur les deux « branches » d'une même ligne de niveau. On utilise la notation `la` pour désigner le paramètre λ.

```
def phi1(x, la):
    return (1/2) * (x**2 + np.sqrt(x**4-4*(x**2 - la)))

def phi2(x, la):
    return (1/2) * (x**2 - np.sqrt(x**4-4*(x**2 - la)))

liste_la = [1.01, 1.2, 2.2, 3.2, 4.2]
abscisse = np.linspace(-4,4,1000)
liste_couleur = ['r', 'b', 'g', 'c', 'm']
n = len(liste_la)

for i in range(n):
    ordonnee1 = [phi1(x, liste_la[i]) for x in abscisse]
    ordonnee2 = [phi2(x, liste_la[i]) for x in abscisse]
    plt.plot(abscisse, ordonnee1, liste_couleur[i])
    plt.plot(abscisse, ordonnee2, liste_couleur[i])
plt.grid()
plt.show()
```

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :
Dans cet exercice, on notera $X \sim Y$ si X et Y sont deux variables aléatoires qui suivent la même loi.

Commentaire

Démontrons ici (il n'est pas certain qu'un calcul soit demandé à l'oral si le reste de la prestation est convaincant) que si $X \sim Y$ et si $\alpha \in]0, +\infty[$, alors $\alpha X \sim \alpha Y$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_{\alpha X}(x) &= \mathbb{P}([\alpha X \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(\left[X \leqslant \frac{x}{\alpha}\right]) && \textit{(car } \alpha > 0\textit{)} \\ &= \mathbb{P}(\left[Y \leqslant \frac{x}{\alpha}\right]) && \textit{(car } X \sim Y\textit{)} \\ &= \mathbb{P}([\alpha Y \leqslant x]) \\ &= F_{\alpha Y}(x) \end{aligned}$$

Les deux fonctions de répartition coïncident donc $\alpha X \sim \alpha Y$.

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{2^n} X_k$. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $S_n \sim \sqrt{2^n} X_1$ »
Initialisation :
On a $S_0 = X_1 = \sqrt{2^0} X_1$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
On a :

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=1}^{2^{n+1}} X_k \\ &= \sum_{k=1}^{2^n} X_k + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} X_k \\ &= S_n + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} X_k \end{aligned}$$

On remarque que $\sum\limits_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} X_k \sim S_n$ (puisque les deux sommes comportent le même nombre de termes) et donc, par hypothèse de récurrence : $\sum\limits_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} X_k \sim S_n \sim \sqrt{2^n} X_1$.
D'après la remarque préliminaire :

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} S_n \sim X_1 \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} X_k \sim X_1 \sim X_2$$

D'après la propriété de la suite (X_n), on a donc :

$$\frac{1}{\sqrt{2^n}} S_{n+1} \sim \sqrt{2} X_1$$

On utilise à nouveau la remarque préliminaire et on en déduit que : $S_{n+1} \sim \sqrt{2^{n+1}} X_1$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

2. Notons μ l'espérance commune des variables aléatoires X_n (qui existe car elles admettent une variance).
On a $X_1 + X_2 \sim \sqrt{2}X_1$ donc $\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(\sqrt{2}X_1)$ donc $2\mu = \sqrt{2}\mu$ (par linéarité) donc $\mu = 0$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(S_n) = 0$ (par linéarité) et $\mathbb{V}(S_n) = 2^n\sigma^2$ (par indépendance).
Par théorème central limite (les hypothèses sont bien vérifiées) :

$$\frac{S_n}{\sqrt{2^n}\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} Z \qquad \text{où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Or, d'après la question ***1*** et la remarque préliminaire : $\dfrac{S_n}{\sqrt{2^n}\sigma} \sim \dfrac{1}{\sigma}X_1$.
On en déduit que $X_1 \sim \sigma Z$.

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que } X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right).}$$

Sujet I02

Exercice avec préparation 2

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-t^2}\, dt \qquad \text{et} \qquad F(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 e^{-t^2}\, dt$$

1. **Cours :** Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition d'un point critique de f, et donner une condition suffisante pour que f possède un extremum local en ce point.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.

3. ***a)*** Montrer que $I_0 = \sqrt{\pi}$.

b) Calculer I_1.

c) Déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n valable pour tout entier naturel n.

d) Calculer I_{2p+1} et I_{2p} pour tout entier naturel p.

4. ***a)*** Calculer $F(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. Calculer les points critiques de F et déterminer leur nature.

Exercice sans préparation 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour toute matrice $M = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on dit que $a_{i,j}$ est un point selle de M si :

$$a_{i,j} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_{k,j} = \min_{1\leqslant k\leqslant n} a_{i,k} \qquad \texttt{OU} \qquad a_{i,j} = \min_{1\leqslant k\leqslant n} a_{k,j} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} a_{i,k}$$

On considère dans la suite une matrice aléatoire $M = (X_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où les variables aléatoires $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

On pose, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

- $L_i = \sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$ et $C_j = \sum_{k=1}^{n} X_{k,j}$
- $S_{i,j}$: « $X_{i,j}$ est un point selle de M »

et on note S la variable aléatoire égale au nombre de points selles de M.

1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Interpréter les variables aléatoires L_i et C_j puis reconnaître leurs lois.

2. Écrire une fonction **Python** `simulS(n)` qui prend en entrée un entier naturel n supérieur ou égal à 2 et renvoie une réalisation de la variable aléatoire S.

3. Calculer, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la probabilité que $X_{i,j}$ soit un point selle de M.

4. Dans le cas $n = 2$, calculer la probabilité que M admette au moins un point selle.

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. Soit $(x,y)\in U$. On dit que (x,y) est un point critique de f si : $\left\{\begin{array}{ll}\partial_1(f)(x,y) & =0\\ \partial_2(f)(x,y) & =0\end{array}\right.$.

Soit (x,y) un point critique. Si la hessienne de f au point (x,y) possède deux valeurs propres (éventuellement égales) non nulles et de même signe, alors f admet un extremum local en (x,y).

2. Soit $n\in\mathbb{N}$.

La fonction $t\mapsto t^n\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale I_n est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$. L'intégrande étant paire ou impaire (selon la parité de n), la convergence de I_n est équivalente à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$.

- × Les fonctions $t\mapsto t^n\mathrm{e}^{-t^2}$ et $t\mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont positives sur $[1,+\infty[$.
- × Par croissance comparées : $t^n\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
- × L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,dt$ converge par critère de Riemann.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison : } I_n \text{ converge.}}$$

3. ***a)*** Le changement de variable affine $t=\dfrac{u}{\sqrt{2}}$ donne :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt &= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\\ &= \sqrt{\pi}\,\mathbb{E}(Z^0) \qquad\qquad (\textit{où } Z\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1))\\ &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } I_0=\sqrt{\pi}.}$$

b) L'intégrale I_1 converge et l'intégrande $t\mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est impaire.

$$\boxed{\text{Par argument de parité : } I_1=0.}$$

c) Soit $(A,B)\in\mathbb{R}^2$, $A\leqslant B$. On procède par intégration par parties (valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A,B]$) :

$$\left|\begin{array}{ll} u'(t)=t^n & u(t)=\dfrac{t^{n+1}}{n+1}\\ v(t)=\mathrm{e}^{-t^2} & v'(t)=-2t\mathrm{e}^{-t^2}\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\int_A^B t^n\mathrm{e}^{-t^2}\,dt &= \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_A^B - \int_A^B -\frac{2}{n+1}t^{n+2}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt\\ &= \frac{1}{n+1}\left(B^{n+1}\mathrm{e}^{-B^2}-A^{n+1}\mathrm{e}^{-A^2}\right)+\frac{2}{n+1}\int_A^B t^{n+2}\mathrm{e}^{-t^2}\,dt\end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} x^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2}=0$. Ainsi, en faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{I_n=\frac{2}{n+1}I_{n+2} \text{ ou encore } I_{n+2}=\frac{n+1}{2}I_n.}$$

d) • Par récurrence immédiate, pour tout entier naturel p :

$$\boxed{I_{2p+1} = 0.}$$

• En itérant la formule $I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2} I_{2p}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2}\frac{2p-1}{2}\dots\frac{1}{2}I_0 \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p}(2k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{p} 2} I_0 \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p}(2k+1)}{2^{p+1}} I_0 \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p}(2k+1)}{2^{p+1}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} 2k}{\prod\limits_{k=1}^{p} 2k} I_0 \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p}(2k+1)}{2^{p+1}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} 2k}{2^p \prod\limits_{k=1}^{p} k} I_0 \\
&= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}p!} I_0 \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} I_0 && \textit{(en multipliant en haut et en bas par } 2p+2\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que, pour tout entier naturel } p : I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}.}$$

Commentaire

Cette formule peut se vérifier par récurrence.

4. a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales en présence convergent d'après la question **2**) :

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 \mathrm{e}^{-t^2}\ dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2+4xy+y^2)t^2 - 2(xy^2+x^2y)t + x^2y^2\right) \mathrm{e}^{-t^2}\ dt \\ &= I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2+4xy+y^2)I_2 - 2(xy^2+x^2y)I_1 + x^2y^2 I_0 \\ &= I_4 + (x^2+4xy+y^2)I_2 + x^2y^2 I_0 \\ &= \sqrt{\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2+4xy+y^2) + x^2y^2\right) \end{aligned}$$

b) La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.

5. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \partial_1(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\left(x + 2y + 2xy^2\right) \\ \partial_2(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\left(y + 2x + 2yx^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ est un point critique de } F &\iff \begin{cases} x+2y+2xy^2 &= 0 \\ y+2x+2yx^2 &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x+2y+2xy^2 &= 0 \\ y-x+2(x-y)+2xy(x-y) &= 0 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ &\iff \begin{cases} x+2y+2xy^2 &= 0 \\ (x-y)(1+2xy) &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x(3+2x^2) &= 0 \\ y &= x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+2y+2xy^2 &= 0 \\ xy &= -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2+2xy+2(xy)^2 &= 0 \\ xy &= -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 &= \frac{1}{2} \\ xy &= -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ xy &= -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \end{aligned}$$

Commentaire

On remarque une symétrie entre les deux premières équations : les termes de gauche sont égaux lorsque $y = x$. Ainsi, la différence des deux termes doit s'annuler lorsque $y = x$ et cette information nous permet de prévoir une factorisation par $x - y$ après avoir fait l'opération sur les lignes.

La fonction F admet donc trois points critiques dans $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1}(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\left(1+2y^2\right)\\
\partial^2_{2,1}(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\,(2+4xy)\\
\partial^2_{1,2}(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\,(2+4xy)\\
\partial^2_{2,2}(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\left(1+2x^2\right)
\end{aligned}$$

- La hessienne de F au point $(0,0)$ est la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 2\sqrt{\pi} \\ 2\sqrt{\pi} & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

  Après résolution de l'équation $\det(H - \lambda I_2) = 0$ (d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$), on trouve que les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\lambda_1 = 3\sqrt{\pi}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\pi}$$

  Elles sont non nulles et de signes opposés, donc le point $(0,0)$ est un point selle.
- La hessienne de F aux points $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

  qui est diagonale. Les valeurs propres de cette matrice sont :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2\sqrt{\pi}$$

  Elles sont toutes les deux strictement positives, donc F admet un minimum local aux points $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. De plus, F prend la valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ en ces deux points.

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. La variable aléatoire L_i est égale à la somme des coefficients sur la ligne i tandis que la variable aléatoire C_j est égale à la somme des coefficients sur la colonne j. Par théorème de stabilité des lois binomiales (les $X_{i,j}$ étant indépendantes), on obtient que L_i et C_j suivent toutes les deux la loi binomiale de paramètre $(n, \frac{1}{2})$.

2. Avant de coder la fonction, il faut essayer de caractériser de manière simple le fait que $X_{i,j}$ soit un point selle de M. Deux cas se présentent :

- Si $X_{i,j} = 0$, alors $X_{i,j}$ est nécessairement le minimum des coefficients sur la ligne i et la colonne j. Dans ce cas :

$$\begin{aligned}
X_{i,j} \text{ est un point selle de } M \iff & \begin{array}{l} X_{i,j} \text{ est le maximum des coefficients sur la ligne } i \\ \texttt{OU } X_{i,j} \text{ est le maximum des coefficients sur la colonne } j \end{array} \\
\iff & \begin{array}{l} 0 \text{ est le maximum des coefficients sur la ligne } i \\ \texttt{OU } 0 \text{ est le maximum des coefficients sur la colonne } j \end{array} \\
\iff & \begin{array}{l} \text{tous les coefficients sur la ligne } i \text{ valent } 0 \\ \texttt{OU} \text{ tous les coefficients sur la colonne } j \text{ valent } 0 \end{array} \\
\iff & \begin{array}{l} \text{la somme des coefficients sur la ligne } i \text{ vaut } 0 \\ \texttt{OU} \text{ la somme des coefficients sur la colonne } j \text{ vaut } 0 \end{array} \\
\iff & [L_i = 0] \cup [C_j = 0] \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

- Si $X_{i,j} = 1$, alors $X_{i,j}$ est nécessairement le maximum des coefficients sur la ligne i et la colonne j. Par symétrie on a :

$$\begin{aligned}
X_{i,j} \text{ est un point selle de } M \iff & \begin{array}{l} \text{la somme des coefficients sur la ligne } i \text{ vaut } n \\ \texttt{OU} \text{ la somme des coefficients sur la colonne } j \text{ vaut } n \end{array} \\
\iff & [L_i = n] \cup [C_j = n] \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

On peut alors proposer la fonction **Python** suivante :

```
def simulS(n):
    M = rd.randint(0,2,[n,n])
    S = 0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            if M[i,j] == 0:
                if np.sum(M[i,:]) == 0 or np.sum(M[:,j]) == 0:
                    S += 1
            else:
                if np.sum(M[i,:]) == n or np.sum(M[:,j]) == n:
                    S += 1
    return S
```

3. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. D'après le raisonnement fait à la question précédente et d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements associé à $X_{i,j}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{i,j}) &= \mathbb{P}(S_{i,j} \cap [X_{i,j} = 0]) + \mathbb{P}(S_{i,j} \cap [X_{i,j} = 1]) \\
&= \mathbb{P}([L_i = 0] \cup [C_j = 0]) + \mathbb{P}([L_i = n] \cup [C_j = n])
\end{aligned}$$

Or : $\mathbb{P}([L_i = 0]) = \mathbb{P}([C_j = 0]) = \dfrac{1}{2^n}$ et d'après la formule du crible :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([L_i = 0] \cup [C_j = 0]) &= \mathbb{P}([L_i = 0]) + \mathbb{P}([C_j = 0]) - \mathbb{P}([L_i = 0] \cap [C_j = 0]) \\ &= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n-1}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n-1}}\end{aligned}$$

Par symétrie, on a : $\mathbb{P}([L_i = n] \cup [C_j = n]) = \mathbb{P}([L_i = 0] \cup [C_j = 0])$.

$$\boxed{\text{On peut conclure que : } \mathbb{P}(S_{i,j}) = 2\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{2n-2}}.}$$

4. D'après toutes les remarques faites précedemment, on obtient :

$$M \text{ admet au moins un point selle} \iff \begin{array}{l}\text{il y a au moins une colonne remplie de } 0\\ \texttt{OU} \text{ il y a au moins une ligne remplie de } 0\\ \texttt{OU} \text{ il y a au moins une colonne remplie de } 1\\ \texttt{OU} \text{ il y a au moins une ligne remplie de } 1\end{array}$$

Lorsque $n = 2$, il y a exactement deux matrices qui n'ont aucune ligne et aucune colonne remplie de 0 ou remplie de 1, il s'agit de :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par équiprobabilité : $\mathbb{P}([S = 0]) = \dfrac{2}{2^4} = \dfrac{1}{8}$.

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que la probabilité que } M \text{ admette au moins un point selle est } \frac{7}{8}.}$$