Planches HEC

Sujet Maths appliquées 2

Exercice avec préparation 1

Valeur numérique utile : si Φ désigne la fonction de répartition d'une variable suivant une loi normale centrée réduite, alors $\Phi(1,96) \approx 0,975$

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Énoncer le théorème central limite.

2. *a)* On admet que le polynôme $Q = X^3 - 2X^2 - X + 2$ est un polynôme annulateur de A. Déterminer le spectre de A et les sous-espaces propres de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

3. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On note : $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n^* = \dfrac{M_n - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de la variable M_n.

b) Donner, pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, l'approximation de la probabilité $\mathbb{P}([-\alpha < M_n^* < \alpha])$ donnée par le théorème central limite.

c) Montrer que, pour n suffisamment grand, $\mathbb{P}\left(p \in \left[M_n - \dfrac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant 95\%$.

4. On note N le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers de $[\![-5, 5]\!]$.

a) On admet qu'on dispose d'une fonction en langage **Python** `vecteurs_propres` prenant en argument un vecteur `u` et renvoyant le booléen `True` si `u` est un vecteur propre de A et `False` sinon. Expliquer comment le programme suivant permet d'estimer la valeur de N :

```
import numpy.random as rd

def simul():
    u = [ rd.randint(-5,6) for k in range(3) ]
    return vecteurs_propres(u)

n = 10000
nb = 0
for k in range(n) :
    if simul():
        nb += 1
print(round(nb/n *11**3))
```

Avec `round(x)` = l'entier le plus proche de `x`.

b) Montrer que si n est choisi suffisamment grand et supérieur à 4×11^6, on est alors sûr à 95% de la valeur affichée.

c) En exécutant le programme pour 4×11^6 , la valeur qui s'affiche est 22. Calculer la valeur exacte de N et commenter le résultat obtenu par cette estimation.

Exercice sans préparation 1
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle bornée vérifiant la propriété :

$$\forall n \geqslant 0, u_n - 2u_{n+1} + u_{n+2} \geqslant 0$$

Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_{n+1} - u_n) = 0$.
On pourra poser $v_n = u_n - u_{n+1}$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que :

× les X_n sont indépendantes

× les X_n suivent toutes la même loi

× les X_n admettent toutes une variance σ^2 non nulle

On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et on note S_n^* la variable aléatoire centrée réduite associée à S_n. Alors

$$S_n^* \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} W \qquad \text{où } W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

2. a) • On remarque que 1, -1 et 2 sont racines évidentes de Q. Ainsi :

$$Q(X) = (X+1)(X-1)(X-2)$$

et on peut conclure que les valeurs propres possibles de A sont : 1, -1 et 2.

• Après calculs, on trouve :

$$E_{-1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_{1}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_{2}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\boxed{\text{On peut conclure que } \text{Sp}(A) = \{-1, 1, 2\}.}$$

b) Par théorème de concaténation des bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes, la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est libre. Puisque elle est de cardinal 3 et $\dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$, c'est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est diagonalisable.}}$$

Commentaire

On peut faire remarquer que A admet 3 valeurs propres distinctes et est carrée d'ordre 3 donc est diagonalisable, mais il faut savoir refaire le raisonnement précédent si le jury demande pourquoi ce résultat est vrai.

3. Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. On note : $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ et $M_n^* = \dfrac{M_n - p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$.

a) Il s'agit d'un calcul classique.

$$\boxed{\text{On trouve : } \mathbb{E}(M_n) = p \text{ et } \mathbb{V}(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}.}$$

b) D'après le calcul précédent, M_n^* est la variable aléatoire centrée réduite associée à $M_n = \overline{X}_n$.
Les variables aléatoires X_k étant indépendantes, de même loi et admettant une variance non nulle (car $0 < p < 1$), on peut appliquer le théorème central limite. Celui nous dit que :

$$M_n^* \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathscr{L}} W$$

où $W \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.
Ainsi, pour tout $\alpha > 0$ et pour tout n assez grand, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([-\alpha < M_n^* < \alpha]) &\approx \mathbb{P}([-\alpha < W < \alpha]) \\ &= \Phi(\alpha) - \Phi(-\alpha) \\ &= 2\Phi(\alpha) - 1\end{aligned}$$

c) Pour n assez grand :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(p \in \left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) &= \mathbb{P}\left(M_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant M_n - p \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant M_n^* \leqslant \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\right)\end{aligned}$$

Or, puisque $p \in]0,1[$, on a $p(1-p) \leqslant \frac{1}{4}$ et donc $\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} \geqslant 2$.
Ainsi :

$$\mathbb{P}\left(p \in \left[M_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; M_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]\right) \geqslant \mathbb{P}\left(-2 \leqslant M_n^* \leqslant 2\right) \approx 2\Phi(2) - 1 \geqslant 2\Phi(1,96) - 1 \approx 0,95$$

(en utilisant la croissance de Φ sur $\mathbb{R}$)

4. a) La matrice A possède N vecteurs propres dont les coefficients sont des entiers de $[\![-5,5]\!]$. Il y a en tout 11^3 tels vecteurs. Ainsi, la probabilité de tomber sur un vecteur propre si l'on fait un tirage aléatoire et équiprobable parmi tous ces vecteurs est :

$$p = \frac{N}{11^3}$$

La fonction `simul()` fait un tirage aléatoire et équiprobable parmi tous ces vecteurs et renvoie `True` s'il s'agit d'un vecteur propre (resp. `False` si ce n'en est pas un). Cette fonction **Python** permet de simuler une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p défini ci-dessus.
La boucle `for` de taille 10000 permet de simuler des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{10000}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p. La variable `nb` compte le nombre de succès. Ainsi, `nb / n` est une approximation de p d'après la loi faible des grands nombres (c'est une réalisation de M_n).
On en déduit que `nb/n *11**3` est une approximation de N. Puisque N est un entier, on rajoute `round` pour renvoyer l'entier le plus proche de l'approximation obtenue.

b) D'après la question ***3.c)*** :

$$\mathbb{P}\left(11^3 M_n - \frac{11^3}{\sqrt{n}} \leqslant N \leqslant 11^3 M_n + \frac{11^3}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$$

Si $n \geqslant 4 \times 11^6$, alors $\dfrac{11^3}{\sqrt{n}} \leqslant 0,5$ et donc, par croissance de $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\left(-0,5 \leqslant N - 11^3 M_n \leqslant 0,5\right) = \mathbb{P}\left(11^3 M_n - 0,5 \leqslant N \leqslant 11^3 M_n + 0,5\right) \geqslant 0,95$$

Ainsi, l'arrondi de $11^3 M_n$ (qui est calculé et affiché par le programme proposé) est bien égal à N plus de 95% du temps.

c) D'après la question ***2.a)***, les vecteurs propres de A à coefficients entiers sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix} \quad \texttt{OU} \quad \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \quad \texttt{OU} \quad \begin{pmatrix} -2k \\ k \\ 3k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{Z}^*$$

Comme il y a 10 entiers nuls compris entre -5 et 5, on dénombre :

× 10 vecteurs propres de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -k \end{pmatrix}$ à coefficients dans $[\![-5,5]\!]$,

× 10 vecteurs propres de la forme $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$ à coefficients dans $[\![-5,5]\!]$,

× 2 vecteurs propres de la forme $\begin{pmatrix} -2k \\ k \\ 3k \end{pmatrix}$ à coefficients dans $[\![-5,5]\!]$ ($k = 1$ et $k = -1$).

Commentaire

On ne compte pas deux fois le même vecteur propre lors de ces trois dénombrements au vu des 0 apparents pour la première et la deuxième forme.

On peut conclure que $N = 22$, ce qui correspond à l'estimation obtenue grâce au programme **Python**.

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

- Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} - v_n = 2u_{n+1} - u_{n+2} - u_n \leqslant 0$$

Ainsi : la suite (v_n) est décroissante.

- Supposons qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $v_{n_0} < 0$.
Alors, par décroissance de (v_n), pour tout entier $n \geqslant n_0$: $v_n \leqslant v_{n_0}$.
On en déduit que la série $\sum v_n$ diverge vers $-\infty$. En effet :

$$\sum_{k=n_0}^{n} v_k \leqslant (n - n_0 + 1) v_{n_0}$$

et on conclut par théorème de comparaison (puisque $(n - n_0 + 1) v_{n_0} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$).
Or, par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} v_k = u_0 - u_n$$

et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, ce qui contredit le fait que (u_n) est bornée.

On peut alors conclure que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \geqslant 0$.

- D'après ce qui précède, la suite (u_n) est décroissante.

$$\boxed{\text{Puisque elle est minorée, } (u_n) \text{ converge par théorème de convergence monotone.}}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Par décroissance de (v_n), on a :

$$\left(n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) v_n \leqslant \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} v_k = u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - u_n$$

Or :

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \leqslant \frac{n}{2} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

et donc :

$$\frac{n}{2} = n - \frac{n}{2} \leqslant n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

D'où :

$$0 \leqslant n v_n \leqslant 2 \left(u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - u_n\right)$$

Puisque (u_n) est convergente, il suit que : $u_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement : } n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.}$$