Planches HEC

Sujet Maths appliquées 5

Exercice avec préparation 1
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite.
On note respectivement φ et Φ la densité continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction de répartition de cette loi.

1. Cours : Énoncer le théorème d'intégration par parties.

2. Donner sans justification la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

3. Montrer que $Z = \max(X, Y)$ est une variable aléatoire à densité. Vérifier que Z admet pour densité la fonction f définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\varphi(x)\Phi(x)$$

4. ***a)*** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $\varphi(x)$.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :
$$\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

c) En déduire que Z admet une espérance et donner sa valeur.

5. ***a)*** Montrer que X^2 et Z^2 suivent la même loi.

b) En déduire la variance de Z.

Exercice sans préparation 1
Un graphe est dit *régulier* s'il est simple et si tous ses sommets ont le même degré. Ce degré commun est alors appelé le degré du graphe régulier.

1. Ecrire le code **Python** d'une fonction `regulier(M)` qui prend en entrée la matrice d'adjacence d'un graphe simple et qui renvoie un booléen égal à `True` si le graphe est régulier, à `False` sinon.

2. Déterminer les graphes réguliers de degré 0, 1 et 2.

3. Soit G un graphe régulier de degré 3. Que dire du nombre de sommets de G ?

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = [\ u(x)v(x)\ ]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx$$

2. On remarque que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt$ est le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire $W \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\boxed{\text{D'où : } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ dt = \sqrt{\pi}}$$

3. Tout d'abord, $Z(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant x])\mathbb{P}([Y \leqslant x]) && \textit{(par indépendance)} \\ &= \Phi(x)^2 \end{aligned}$$

La fonction de répartition F_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc Z est à densité.
On dérive F_Z sur $\mathbb{R}$ pour obtenir une densité, en se souvenant que $\Phi' = \varphi$.

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto 2\varphi(x)\Phi(x) \text{ est une densité de } Z.}$$

4. ***a)*** La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} = -x\varphi(x)}$$

b) Tout d'abord,

$$\int_0^{+\infty} xf(x)\ dx = 2\int_0^{+\infty} x\varphi(x)\Phi(x)\ dx = -2\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\ dx$$

Soit $B \geqslant 0$. On procède par IPP :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(x) = \varphi'(x) & u(x) = \varphi(x) \\ v(x) = \Phi(x) & v'(x) = \varphi(x) \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$.

$$\begin{aligned} \int_0^B \varphi'(x)\Phi(x)\ dx &= [\ \varphi(x)\Phi(x)\ ]_0^B - \int_0^B \varphi(x)^2\ dx \\ &= \varphi(B)\Phi(B) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2} - \int_0^B \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right)^2\ dx \\ &= \varphi(B)\Phi(B) - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} - \int_0^B \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-x^2}\ dx \\ &= \varphi(B)\Phi(B) - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^B \mathrm{e}^{-x^2}\ dx \end{aligned}$$

De plus,

× $\lim\limits_{B \to +\infty} \varphi(B) = 0$

× $\lim\limits_{B \to +\infty} \Phi(B) = 1$

× $\lim\limits_{B\to+\infty} \int_0^B \mathrm{e}^{-x^2}\, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$ (intégrale convergente d'après la question *2*)

Par passage à la limite lorsque $B \to +\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)\, dx = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

En multipliant par -2, on obtient le résultat souhaité :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx}$$

c) En faisant un calcul analogue, on a également :

$$\int_{-\infty}^{0} xf(x)\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$$

La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx$ est absolument convergente, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment.
On a montré précédemment que $\int_{-\infty}^{0} xf(x)\, dx$ et $\int_0^{+\infty} xf(x)\, dx$ sont toutes les deux convergentes donc $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx$ est convergente. De plus,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} xf(x)\, dx + \int_0^{+\infty} xf(x)\, dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\sqrt{\pi} && \textit{(d'après la question 2)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}
\end{aligned}$$

5. a) Tout d'abord, $X^2(\Omega) = Z^2(\Omega) = \mathbb{R}^+$ donc, pour tout $x < 0$, $F_{X^2}(x) = F_{Z^2}(x) = 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned}
F_{Z^2}(x) &= \mathbb{P}(\left[Z^2 \leqslant x\right]) \\
&= F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(-\sqrt{x}) \\
&= \Phi^2(\sqrt{x}) - \Phi^2(-\sqrt{x}) \\
&= (\Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}))(\Phi(\sqrt{x}) + \Phi(-\sqrt{x})) \\
&= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) && \textit{(car } \Phi(-t) = 1 - \Phi(t)\textit{)} \\
&= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \\
&= F_{X^2}(x)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les fonctions de répartition coïncident donc } X^2 \text{ et } Z^2 \text{ suivent la même loi.}}$$

b) La variable aléatoire X^2 admet une espérance donc Z admet un moment d'ordre 2, *i.e.* Z admet une variance. D'après Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \frac{1}{\pi} = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 - \frac{1}{\pi} = 1 - \frac{1}{\pi}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. On propose la fonction suivante :

```
def regulier(M):
    n = len(M)
    deg = np.sum(M[0])
    for i in range(1,n):
        if np.sum(M[i]) != deg:
            return False
    return True
```

2. • Les graphes réguliers de degré 0 sont les graphes complètement déconnectés (il n'y a aucune arête reliant deux sommets).

• Les graphes réguliers de degré 1 sont les réunions déconnectées de paires de sommets reliés par une arête.

• Les graphes réguliers de degré 2 sont les réunions déconnectées de cycles.

3. Notons n le nombre de sommets du graphe et A le nombre d'arêtes.

Tout d'abord, il y a au moins 4 sommets (chaque sommet étant relié à trois autres sommets).

$$\boxed{n \geqslant 4}$$

Ensuite, d'après la formule d'Euler :

$$\sum_{x \in S} \deg(x) = 2A$$

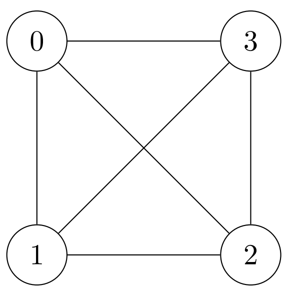
où S est l'ensemble des sommets de notre graphe G. D'où $3n = 2A$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } n \text{ est pair.}}$$

4. *Question supplémentaire : démontrer la réciproque du résultat précédent.*

On se donne un entier $k \geqslant 2$ et on cherche à construire un graphe régulier de degré 3 possédant $2k$ sommets.

• Pour $k = 2$, une solution est fournie par le graphe complet à 4 sommets :



• Pour le cas général avec $k \geqslant 3$, on note les sommets $s_1, s_2, \ldots, s_{2k}$ et on les sépare en deux moitiés : $\{s_1, \ldots, s_k\}$ et $\{s_{k+1}, \ldots, s_{2k}\}$.

<u>Construction numéro 1 :</u> on relie

× s_1 à s_{k+1}, s_{k+2} et s_{k+3} ;

× s_2 à s_{k+2}, s_{k+3} et s_{k+4} ;

× ...

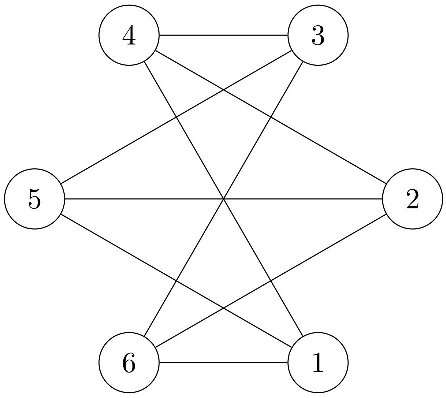
× s_{k-2} à s_{2k-2}, s_{2k-1} et s_{2k} ;

× s_{k-1} à s_{2k-1}, s_{2k} et s_{k+1} ;

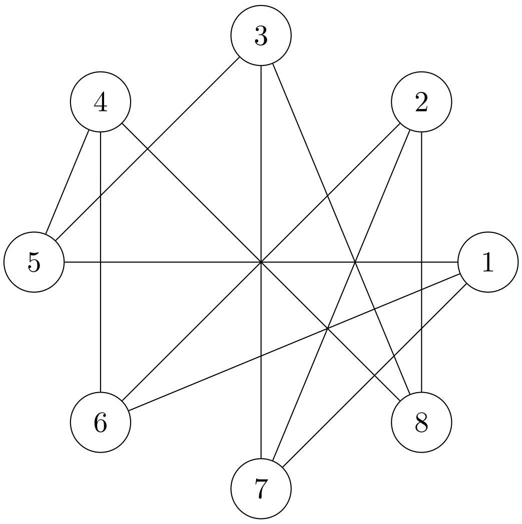
× s_k à s_{2k}, s_{k+1} et s_{k+2} ;

Il est assez facile de voir que tous les sommets $s_1, \ldots, s_k$ sont de degré 3. C'est un peu plus dur pour les sommets $s_{k+1}, \ldots, s_{2k}$, mais il suffit de se convaincre que chacun de ces sommets apparaît exactement trois fois dans la liste ci-dessus.

Représentons le graphe obtenu pour $k = 3$ et en numérotant les sommets de 1 à 6.



Représentons le graphe obtenu pour $k = 4$ et en numérotant les sommets de 1 à 8.



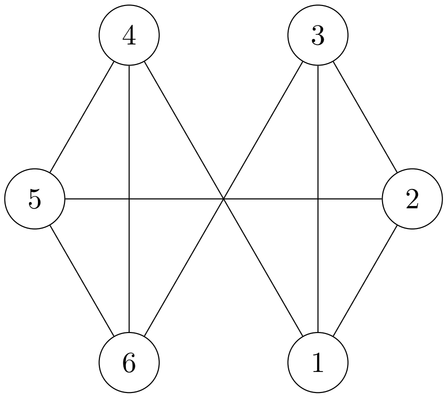
<u>Construction numéro 2 :</u>

× on crée un cycle en reliant s_1 à s_2, puis s_2 à s_3, ..., puis s_{k-1} à s_k et enfin s_k à s_1. Chacun de ces sommets possède deux arêtes dans ce cycle.

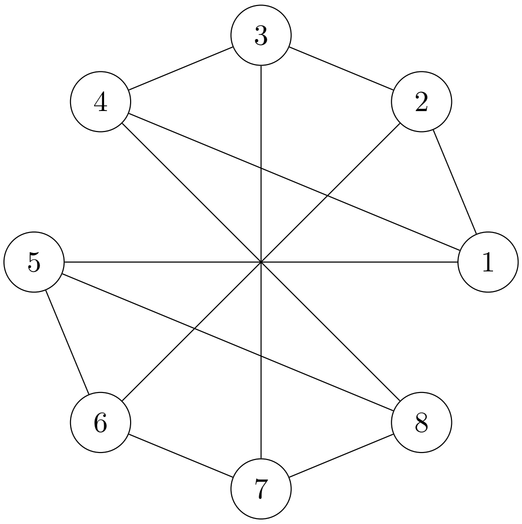
× on crée un cycle en reliant s_{k+1} à s_{k+2}, puis s_{k+2} à s_{k+3}, ..., puis s_{2k-1} à s_{2k} et enfin s_{2k} à s_{k+1}. Chacun de ces sommets possède deux arêtes dans ce cycle.

× pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on relie s_i et s_{k+i}. Ceci ajoute une troisième arête à chaque sommet et donc tous les sommets sont de degré 3.

Représentons le graphe obtenu pour $k = 3$ et en numérotant les sommets de 1 à 6.



Représentons le graphe obtenu pour $k = 4$ et en numérotant les sommets de 1 à 8.



Représentons le graphe obtenu pour $k = 5$ et en positionnant différemment les sommets numérotés de 1 à 10.