Planches HEC

Sujet E08

Exercice avec préparation 1

Une banque étudie la mise sur le marché de trois produits de placement A, B et C.
On note x, respectivement y et z, le nombre de clients ayant un placement de type A, respectivement B et C. Ces trois produits évoluent en fonction du temps et sont en interaction.
Ils sont décrits par le système différentiel suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & - & y & + & z \\ y' & = & -x & + & y & + & z \\ z' & = & x & - & y & + & z \end{array}\right.$$

1. **Cours** : Problème de Cauchy.

2. Écrire le problème sous la forme matricielle $X' = MX$ et diagonaliser M.

3. Résoudre ce problème sachant qu'à l'instant 0, il y a 300 clients qui ont un placement de type A, 200 de type B et 200 de type C.

4. Quels sont les comportements asymptotiques des solutions ?

5. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
La Banque abandonne le produit B et remarque que le nombre de clients, X, prenant un placement de type A suit une loi de Poisson de paramètre λ.
Le nombre de clients, Y, prenant un placement de type C vaut $\left\lfloor \dfrac{X}{2} \right\rfloor$.
Déterminer la loi et l'espérance de Y.

Exercice sans préparation 1

Deux joueurs, A et B, jouent à se lancer des paris.
Le joueur B propose le pari suivant au joueur A :

- Le joueur B commence par choisir une pièce (éventuellement truquée) qui tombe sur `Pile` avec probabilité $q \in]0,1[$. Le joueur A a connaissance de cette probabilité.
- Le joueur A choisit ensuite sa pièce (également éventuellement truquée) qui tombe sur `Pile` avec probabilité $p \in]0,1[$.
- Les deux joueurs lancent chacun leur pièce jusqu'à-ce qu'elle tombe sur `Pile`. Chacun note le nombre de lancers effectués.
- Si le joueur B a fait exactement 1 lancer de moins que le joueur A, alors le joueur A gagne le pari.

On suppose que tous les lancers des pièces sont indépendants.

1. *a)* Calculer la probabilité que A gagne le pari une fois que p et q ont été fixés.

b) Comment A doit-il choisir sa pièce pour maximiser ses chances de réussite (connaissant la pièce choisie par B) ?

2. Le joueur B propose malicieusement au joueur A de choisir lui-même les deux pièces de sorte à maximiser ses chances de gagner le pari. Expliquer pourquoi le joueur A ne peut pas y arriver.

3. Le joueur B trouve que le joueur A réussit trop souvent à gagner le pari. Il souhaite corser le jeu pour A et modifie les règles :

- Le joueur A choisit en premier sa pièce (éventuellement truquée) qui tombe sur `Pile` avec probabilité $p \in]0,1[$.
- Le joueur B choisit ensuite sa pièce aléatoirement, suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(]0,1[)$.

Quel code **Python** peut écrire A pour décider quelle pièce choisir afin de maximiser ses chances de gagner le pari ?

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $X_0 \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution.

2.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x' & = & x & - & y & + & z \\ y' & = & -x & + & y & + & z \\ z' & = & x & - & y & + & z \end{array}\right. \iff X' = MX$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

On calcule le spectre de M. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(M - \lambda I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}\right) && L_3 \leftrightarrow L_1 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 2-\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda(2-\lambda) \end{pmatrix}\right) && \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (1-\lambda)L_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1-\lambda \\ 0 & -\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & (2-\lambda)(\lambda-1) \end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow L_3 - L_2
\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{Sp}(M) = \{0, 1, 2\}$. M admet 3 valeurs propres distinctes donc est diagonalisable et chacun de ses sous-espaces propres est de dimension 1. On résout les équations ou on trouve à vue :

$$E_0(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_1(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_2(M) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Par formule de changement de base : $M = PDP^{-1}$ où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. La matrice M est diagonalisable et on connait ses éléments propres d'après la question précédente. Ainsi, les solutions de $X' = MX$ sont de la forme

$$X : t \mapsto \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
On remarque qu'avec $\alpha = \beta = \gamma = 100$, la solution X vérifie

$$X(0) = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

Par unicité c'est la seule et donc l'unique solution est

$$X : t \mapsto 100 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 100 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 100 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Si $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$, alors la solution est divergente. Sinon, la solution est constante donc converge.

5. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([Y = k]) &= \mathbb{P}\left(\left[\left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor = k\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[k \leqslant \frac{X}{2} < k+1\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left([2k \leqslant X < 2k+2]\right) \\ &= \mathbb{P}\left([X = 2k \text{ ou } X = 2k+1]\right) \\ &= \mathbb{P}([X = 2k]) + \mathbb{P}([X = 2k+1]) && \textit{(par incompatibilité)} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} + \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \right) \end{aligned}$$

Il est clair que $k\mathbb{P}([Y = k]) \underset{k \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ (par croissances comparées) donc Y admet une espérance.
Notons $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ et $I = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$. On remarque que

$$\begin{aligned} e^{\lambda} &= S + I \\ e^{-\lambda} &= S - I \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} S &= \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} \\ I &= \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2} \end{aligned}$$

Il suit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}([Y=k]) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k\lambda^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2k\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+1)\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k)!} - I\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\lambda I + \lambda S - I\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\lambda \mathrm{e}^{\lambda} - \frac{\mathrm{e}^{\lambda} - \mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\right) \\
&= \frac{2\lambda - 1 + \mathrm{e}^{-2\lambda}}{4}
\end{aligned}$$

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. a) On note $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$ deux variables aléatoires indépendantes.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([Y = X-1]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=X-1]\cap[X=k]) && \textit{(FPT)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k-1])\mathbb{P}([X=k]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}([Y=k-1])\mathbb{P}([X=k]) \\
&= \sum_{k=2}^{+\infty} q(1-q)^{k-2}p(1-p)^{k-1} \\
&= pq(1-p)\sum_{k=2}^{+\infty} \left((1-p)(1-q)\right)^{k-2} \\
&= \frac{pq(1-p)}{1-(1-p)(1-q)}
\end{aligned}$$

b) On suppose dans cette question que $q \in]0,1[$ est fixé. On note $\overline{q} = 1-q$.

On introduit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{xq(1-x)}{1-(1-x)(1-q)}$ dérivable sur $]0,1[$. Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= q\frac{(1-2x)(1-\overline{q}(1-x)) - \overline{q}x(1-x)}{(1-\overline{q}(1-x))^2} \\
&= q\frac{q-2qx-\overline{q}x^2}{(1-\overline{q}(1-x))^2} && \textit{(après simplifications)}
\end{aligned}$$

Le numérateur $h(x) = q - 2qx - \overline{q}x^2$ est un trinôme du second degré en x. Son discriminant est

$$\Delta = (-2q)^2 - 4q(-\overline{q}) = 4q(q+\overline{q}) = 4q$$

Ainsi, h s'annule en deux points :

$$x_1 = \frac{2q-2\sqrt{q}}{-2\overline{q}} = \frac{\sqrt{q}-q}{\overline{q}} = \frac{\sqrt{q}(1-\sqrt{q})}{1-q} = \frac{\sqrt{q}(1-\sqrt{q})}{(1-\sqrt{q})(1+\sqrt{q})} = \frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}} \in]0,1[$$

et

$$x_2 = \frac{2q + 2\sqrt{q}}{-2\overline{q}} = -\frac{q + \sqrt{q}}{\overline{q}} < 0$$

La fonction g est croissante sur $]0, x_1]$ et décroissante sur $[x_1, 1[$ donc admet un maximum en x_1. Ainsi, le joueur A doit choisir $p = \dfrac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}$.

2. On introduit la fonction de deux variables $f :]0,1[^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in]0, 1[^2, \ f(x, y) = \frac{xy(1-x)}{1-(1-x)(1-y)}$$

On cherche ses points critiques.

$$\partial_2(f)(x, y) = \frac{x^2(1-x)}{(1-(1-x)(1-y))^2} \neq 0$$

Ainsi, f n'admet aucun point critique sur l'ouvert $]0, 1[^2$ et donc n'admet aucun extremum local (en particulier aucun maximum local).

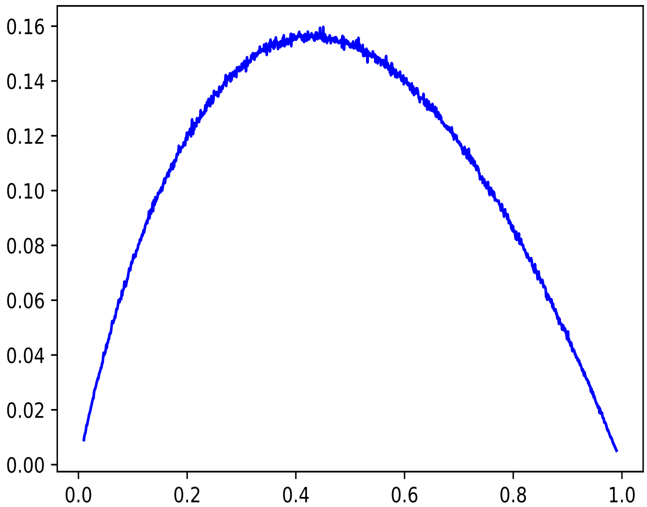
3. On propose le code suivant :

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import numpy.random as rd

# La fonction suivante renvoie 1 si A gagne le pari et 0 sinon
def pari(p):
    q = rd.random()
    X = rd.geometric(p)
    Y = rd.geometric(q)
    if Y == X-1:
        return 1
    else:
        return 0

# On note P(A) la probabilité que A gagne
# La fonction suivante calcule une approximation de P(A) grâce à la LfGN
def approx_proba_victoire_aleatoire(p):
    N = 10**5
    L = [pari(p) for k in range(N)]
    return np.mean(L)

# La fin de ce script permet de représenter graphiquement P(A) en fonction de p
# On affiche dans la console une approximation de la probabilité p à choisir
abscisse = np.linspace(0.01, 0.99, 1000)
ordonnee = [approx_proba_victoire_aleatoire(p) for p in abscisse]
valeur_maximale = max(ordonnee)
indice_du_max = ordonnee.index(valeur_maximale)
proba_max = abscisse[indice_du_max]
print('Espérance maximale atteinte en p = ', proba_max)
plt.plot(abscisse, ordonnee)
plt.show()
```

La console **Python** affiche le message suivant :

```
Espérance maximale atteinte en p = 0.472042042042042 03
```

ainsi que le graphique :



Sujet Maths appliquées 9

Exercice avec préparation 2

Soit α un nombre réel. On considère la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix}$$

et on note ϕ_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par A_α dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On appelle f_1 le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et f_2 le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. Question de cours : critère de diagonalisabilité d'une matrice selon les sous-espaces propres.

2. ***a)*** Montrer que, quelque soit α, la matrice A_α admet la valeur propre 1.

b) On note $E_1(\alpha)$ le sous-espace propre de A_α associé à la valeur propre 1. Déterminer, suivant les valeurs de α, une base de $E_1(\alpha)$.

3. On note $F = \text{Vect}\,(f_1, f_2)$.

a) Montrer que l'image par ϕ_α de tout vecteur de F appartient à F.

b) On appelle $\hat{\phi}_\alpha$ l'endomorphisme de F induit par ϕ_α, c'est-à-dire vérifiant, pour tout vecteur V de F, $\hat{\phi}_\alpha(V) = \phi_\alpha(V)$.

Donner une matrice de $\hat{\phi}_\alpha$.

4. Montrer que pour tout réel α, $\alpha - 1$ est une valeur propre de A_α et que l'on peut trouver un vecteur f_3 de $\mathbb{R}^3$ ne dépendant pas de α, qui soit, pour tout réel α, vecteur propre de A_α associé à la valeur propre $\alpha - 1$.

5. Pour quelles valeurs du paramètre α la matrice A_α est-elle diagonalisable ?

Exercice sans préparation 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de Pile obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur gagne 10 euros pour chaque Pile obtenu ; dans le cas contraire, il perd 10 euros pour chaque Pile obtenu. La pièce est truquée et, à chaque lancer, la probabilité d'obtenir Pile est égale à p, avec $p \in]0, 1[$.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Ecrire le code d'une fonction **Python** `simule_G(n,p)` qui réalise une simulation du gain du joueur.

2. Déterminer l'espérance de G.

Comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce pour optimiser sa rentabilité ?

3. Le concepteur du jeu décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$. Il pense pouvoir compter sur la participation de 200 joueurs dans la journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée. Installera-t-il son stand ?

Réponses de l'exercice avec préparation 2 :

1. Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n.

2. ***a)*** On remarque que :

$$A_\alpha f_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f_1$$

Or, $f_1 \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc 1 est une valeur propre de A_α et f_1 est un vecteur propre de A_α associé à la valeur propre 1.

b) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
U \in E_1(\alpha) &\iff (A_\alpha - I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -2 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x \qquad\qquad\quad - \alpha z = 0 \\ \ \ 2x + (\alpha-2)y + \alpha z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ \qquad \alpha(\alpha-2)y + \alpha(\alpha-2)z = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - \alpha L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \\
&\iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y = \alpha z \\ \qquad \alpha(\alpha-2)y = -\alpha(\alpha-2)z \end{cases}
\end{aligned}$$

Trois cas se présentent :

- Premier cas : $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 2$. Alors

$$U \in E_1(\alpha) \iff \begin{cases} -2x + (2-\alpha)y = \alpha z \\ \qquad\qquad y = -z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ \quad y = -z \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \alpha \neq 0 \text{ et } \alpha \neq 2, \text{ alors } E_1(\alpha) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\,(f_1) \\ \text{et la famille } (f_1) \text{ est une base de } E_1(\alpha). \end{array}}$$

- Deuxième cas : $\alpha = 0$. Alors

$$U \in E_1(\alpha) \iff \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ \qquad 0 = 0 \end{cases} \iff x = y$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 0, \text{ alors } E_1(\alpha) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(\alpha).}$$

- Troisième cas : $\alpha = 2$. Alors

$$U \in E_1(\alpha) \iff \begin{cases} -2x & = 2z \\ & 0 = 0 \end{cases} \iff x = -z$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha = 2, \text{ alors } E_1(\alpha) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et la famille } \left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(\alpha).}$$

3. On note $F = \text{Vect}\,(f_1, f_2)$.

a) Puisque (f_1, f_2) est une famille génératrice de F et ϕ_α est linéaire, il suffit de montrer que $\phi_\alpha(f_1) \in F$ et $\phi_\alpha(f_2) \in F$.
On a déjà vu que $\phi_\alpha(f_1) = f_1$ donc $\phi_\alpha(f_1) \in F$.
De plus,

$$A_\alpha f_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 1 & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & \alpha+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\alpha\\1+\alpha\\-\alpha-2\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \alpha f_1 + f_2$$

donc $\phi_\alpha(f_2) = \alpha f_1 + f_2 \in F$.

Commentaire

L'énoncé confond les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ avec les vecteurs de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et confond ϕ_α avec A_α. En toute rigueur, il aurait fallu définir F de la manière suivante :

$$F = \text{Vect}\,((1,1,-1), (1,1,-2))$$

Dans cette question et dans la suite de l'exercice, on s'autorisera à utiliser cette identification entre (x,y,z) et $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ pour ne pas introduire plus de notations.

b) D'après les calculs de la question précédente :

$$\boxed{\text{Mat}_{(f_1,f_2)}(\hat{\phi}_\alpha) = \begin{pmatrix}1 & \alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix}.}$$

4. Soit $U = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
U \in E_{\alpha-1}(\alpha) &\iff (A_\alpha - (\alpha-1)I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2-\alpha & -\alpha \\ 2 & \alpha-2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{cases} -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \\ 2x + (\alpha-2)y + 2z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + (\alpha-2)y + 2z = 0 \\ -\alpha x + (2-\alpha)y - \alpha z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x + (\alpha-2)y + 2z = 0 \\ (\alpha-2)^2 y = 0 \end{cases} \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 + \alpha L_1
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent :

- Premier cas : $\alpha \neq 2$. Alors

$$U \in E_{\alpha-1}(\alpha) \iff \begin{cases} 2x + (\alpha-2)y + 2z = 0 \\ \qquad\qquad\quad y \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \qquad = -z \\ \quad y \quad = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Si } \alpha \neq 2, \text{ alors } E_{\alpha-1}(\alpha) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ et la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{\alpha-1}(\alpha).}$$

- Deuxième cas : $\alpha = 2$. Alors

$$U \in E_{\alpha-1}(\alpha) \iff \begin{cases} 2x \quad + 2z \quad = 0 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \iff x = -z$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Si } \alpha = 2, \text{ alors } E_{\alpha-1}(\alpha) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ et} \\ \text{la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_{\alpha-1}(\alpha). \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On peut conclure que, quelque soit le réel } \alpha,\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre} \\ \text{de } A_\alpha \text{ pour la valeur propre } \alpha - 1. \end{array}}$$

5. • Posons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0 &\iff \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \qquad = 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \qquad\quad - \lambda_3 = 0 \\ \quad - \lambda_2 \qquad = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} L2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}$ est libre. De plus, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, la famille } \mathcal{B} \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

- Puisque $\phi_\alpha(f_1) = f_1$, $\phi_\alpha(f_2) = \alpha f_1 + f_2$ et $\phi_\alpha(f_3) = (\alpha-1)f_3$, la matrice de ϕ_α dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\boxed{N_\alpha = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix}}$$

et cette matrice est semblable à A_α (d'après la formule de changement de base).

- Supposons $\alpha = 0$. Dans ce cas, N_α est diagonale et donc A_α est diagonalisable.

- Supposons $\alpha = 2$. Dans ce cas, N_α est triangulaire supérieure et $\text{Sp}(N_\alpha) = \{1\}$. Si A_α est diagonalisable, alors N_α l'est aussi et donc $N_\alpha = I_3$. C'est absurde. Donc A_α n'est pas diagonalisable.
- Supposons $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 2$. Dans ce cas, N_α est triangulaire supérieure et $\text{Sp}(N_\alpha) = \{1, \alpha - 1\}$. Si A_α est diagonalisable, alors N_α l'est aussi et donc $\dim(E_1(N_\alpha)) + \dim(E_{\alpha-1}(N_\alpha)) = 3$. Or, $\dim(E_1(N_\alpha)) = \dim(E_{\alpha-1}(N_\alpha)) = 1$. C'est absurde. Donc A_α n'est pas diagonalisable.

Réponses de l'exercice sans préparation 2 :

1. On propose deux solutions :

```
def simule_G(n,p):
    X = rd.binomial(n, p) # Nombre de Pile
    if X == 2 * np.floor(X/2): # Si X est pair
        return 10 * X
    else:
        return -10 * X
```

ou

```
def simule_G(n,p):
    X = rd.binomial(n, p)
    return 10*X*(-1)**X
```

La deuxième solution est meilleure pour la suite de l'exercice, car elle traduit le fait que G est une transformée de X :

$$G = 10X(-1)^X$$

2. Rappelons que $G = h(X)$ où $h : x \mapsto 10x(-1)^x$. La variable X est finie ($X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) et donc G également.
D'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(G) &= \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10 \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} (-p)^k(1-p)^{n-k} \\
&= 10 \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} (-p)^k(1-p)^{n-k} && \textit{(formule du capitaine)} \\
&= 10n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^{k+1}(1-p)^{n-(k+1)} \\
&= -10np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (-p)^k(1-p)^{n-1-k} \\
&= -10np(1-2p)^{n-1} && \textit{(binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

On cherche pour quelle valeur de p l'espérance de gain du joueur est minimale.
On pose $f : x \mapsto -10nx(1-2x)^{n-1}$ définie sur $]0,1[$. La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $]0,1[$. Soit $x \in]0,1[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -10n\left((1-2x)^{n-1} - 2(n-1)x(1-2x)^{n-2}\right) \\
&= -10n(1-2x)^{n-2}\left(1 - 2x - 2(n-1)x\right) \\
&= -10n(1-2x)^{n-2}(1-2nx)
\end{aligned}$$

Deux cas se présentent :

- Premier cas : n est pair. Dressons le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-5\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$10n$

$$\boxed{\text{Ainsi, il faut choisir } p = \frac{1}{2n} \text{ pour que le concepteur du jeu optimise sa rentabilité.}}$$

- Deuxième cas : n est impair. Dressons le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2n}$		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	0	$\searrow$	$-5\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-10n$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'admet aucun minimum global sur }]0,1[\text{, il n'y a pas de choix optimal.}}$$

3. Notons, pour tout $i \in [\![1, 200]\!]$, G_i la variable aléatoire égale au gain du i^{e} joueur de la journée. Avec $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$ (ce qui correspond bien au choix optimal du concepteur du jeu d'après la question précédente), la loi de G_i est donnée par :

$$\mathbb{P}([G_i = 20]) = p^2 = \frac{1}{16}, \qquad \mathbb{P}([G_i = 0]) = (1-p)^2 = \frac{9}{16}, \qquad \mathbb{P}([G_i = -10]) = 2p(1-p) = \frac{3}{8}$$

On a donc :

$$\mathbb{E}(G_i) = 20 \times \frac{1}{16} - 10 \times \frac{3}{8} = -\frac{5}{2}$$

et, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathbb{V}(G_i) = \mathbb{E}(G_i^2) - \mathbb{E}(G_i)^2 = 400 \times \frac{1}{16} + 100 \times \frac{3}{8} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4}$$

Soit H la variable aléatoire égale au gain du concepteur du jeu. On a $H = -\sum\limits_{i=1}^{200} G_i$.

La variable aléatoire H admet une variance comme somme de variables aléatoires qui sont finies donc en admettent une. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(H) = -200 \times -\frac{5}{2} = 500$$

Par indépendance des variables aléatoires G_i :

$$\mathbb{V}(H) = 200 \times \frac{225}{4} = 50 \times 225$$

On remarque que :

$$\mathbb{P}([H \leqslant 100]) \leqslant \mathbb{P}([|H - 500| \geqslant 400])$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (valable car H admet une variance) :

$$\mathbb{P}([H \leqslant 100]) \leqslant \mathbb{P}([|H - \mathbb{E}(H)| \geqslant 400]) \leqslant \frac{\mathbb{V}(H)}{400^2} = \frac{50 \times 225}{16 \times 10^4} = \frac{5 \times 225}{16 \times 10^3} = \frac{225}{32 \times 10^2} < \frac{10}{100}$$

$$\boxed{\text{Le concepteur du jeu peut installer son stand.}}$$