Table des matières

Dans tout le chapitre, sauf précisions :

- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$,
- $\overline{I}$ désigne *l'adhérence* de I (l'intervalle I auquel on a rajouté les bornes finies),
- f, g, h désignent des fonctions réelles définies sur I,
- x_0 est un point de $\overline{I}$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.

1 Relations de comparaisons et théorème des croissances comparées

1.1 Négligeabilité

1.1.1 Définition et premiers exemples polynomiaux

Definition 1. On dit que f *est négligeable devant* g *en* x_0 (ou que g *domine* f *en* x_0) si :

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0}$$

Si c'est le cas, on dit que « f est un petit o de g en x_0 » (o = 15$^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet) et on note : $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$.

Exemple 1.

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$ donc $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$ donc $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- On a $x^2 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ et $x^3 = \underset{x\to 0}{o}(x)$ mais on ne peut pas conclure que $x^2 = x^3$.
- On peut écrire $\underset{x\to 0}{o}(x^2) = \underset{x\to 0}{o}(x)$ mais il est faux d'écrire $\underset{x\to 0}{o}(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

$$\boxed{\text{Le symbole d'égalité est à manier avec précaution lorsque l'on travaille avec les petits o.}}$$

Remarque 1. De manière générale, écrire que $f(x) = g(x) + \underset{x\to 0}{o}(h(x))$, c'est dire que $f(x) - g(x) = \underset{x\to 0}{o}(h(x))$, *i.e.* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-g(x)}{h(x)} = 0$.

1.1.2 Croissances comparées

Théoreme 1. *Soient $a > 0$, $b > 0$ et $q > 1$. Alors*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0, \qquad \text{i.e. } (\ln(x))^b = \underset{x\to+\infty}{o}(x^a)}$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{q^x} = 0, \qquad \text{i.e. } x^a = \underset{x\to+\infty}{o}(q^x)}$$

Il faut savoir lire ce théorème dans l'autre sens :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{(\ln(x))^b} = +\infty}$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{q^x}{x^a} = +\infty}$$

Exemple 2.

1. $a = 1$ et $b = 2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln(x))^2}{x} = 0$ donc $(\ln(x))^2 = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$.
2. $a = 1/2$ et $b = 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0$ donc $\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(\sqrt{x})$.
3. $a = 10$ et $q = e$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{10}}{e^x} = 0$ donc $x^{10} = \underset{x\to+\infty}{o}(e^x)$.
4. $a = 1$ et $q = e^2$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{2x}} = 0$ donc $x = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{2x})$.
5. $a = 2$ et $q = e^{1/3}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{3}x}}{x^2} = +\infty$ donc $x^2 = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\frac{1}{3}x})$.

Du théorème précédent, on tire

Théoreme 2. *Soient $a > 0$, $b > 0$, $n \in \mathbb{N}$ et $0 < r < 1$. Alors*

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} x^a\ |\ln(x)|^b\ =\ 0} \quad \textit{et} \quad \boxed{\lim_{x\to0^+} x^a\ \ln(x)^n\ =\ 0} \quad \textit{et} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} x^a\ r^x = 0}$$

Exemple 3.

1. $a = 1$ et $b = 1$: $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x) = 0$
2. $a = 1$ et $r = \frac{1}{2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$.
3. $a = 2$ et $r = \frac{1}{3}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$.
4. $a = 5$ et $r = e^{-2}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5e^{-2x} = 0$.
5. $a = 3$ et $r = e^{-4}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-4x} = 0$.

1.1.3 Lien entre négligeabilité et fonction qui tend vers 0

Proposition 3. *On suppose que $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$.*

Démonstration. On écrit
$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x)$$
ce qui est le produit de deux fonctions qui tendent vers 0 en x_0. □

Remarque 2. Dans cette situation, il faut penser à la fonction f comme à une fonction qui tend vers 0 en x_0 *plus rapidement* que g. Autrement dit, lorsque x se rapproche de x_0, le nombre $f(x)$ est beaucoup plus petit que le nombre $g(x)$.

1.1.4 Lien entre négligeabilité et fonction qui tend vers $+\infty$

Proposition 4. *Soient f et g deux fonctions à valeurs positives. On suppose que $f(x) = \underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.*

Démonstration. On écrit
$$g(x) = \frac{g(x)}{f(x)}f(x)$$
ce qui est le produit de deux fonctions qui tendent vers $+\infty$ en x_0. □

Remarque 3. Dans cette situation, il faut penser à la fonction g comme à une fonction qui tend vers $+\infty$ en x_0 *plus rapidement* que f. Autrement dit, lorsque x se rapproche de x_0, le nombre $g(x)$ est beaucoup plus grand que le nombre $f(x)$.

1.2 Équivalence

1.2.1 Définition

Definition 2. On dit que f *est équivalente à* g *en* x_0 si :

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

Si c'est le cas, on note $f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x)$.

Méthode (Trouver un équivalent simple d'une somme de fonctions)*.* On applique la même méthode que pour les suites, on cherche le terme qui tend le plus vite vers l'infini, ou le moins vite vers 0.

Exemple 4*.* Trouver un équivalent simple de $f(x) = x^2 + 3x + \mathrm{e}^x$ en $+\infty$.

e^x est le « terme dominant » en $+\infty$. En effet, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\mathrm{e}^x} = 1$. D'où $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$

Exemple 5*.* Trouver un équivalent simple de $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$ en $+\infty$.

$\dfrac{1}{\ln(x)}$ est le « terme dominant » en $+\infty$. En effet, on a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\mathrm{e}^x}}{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\mathrm{e}^x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{\ln(x)}} = 1$. D'où $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(x)}$.

1.2.2 Equivalents usuels

Théoreme 5. *On a, pour tout réel* α *:*

$$\ln(1 + x) \underset{x \to 0}{\sim} x, \qquad \mathrm{e}^x - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x \qquad \text{et} \qquad (1 + x)^\alpha - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x$$

Démonstration. Il s'agit de taux d'accroissements. ☐

1.2.3 Propriétés générales

Théoreme 6. *La relation* $\underset{x \to x_0}{\sim}$ *vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Réflexivité :*

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

2. *Symétrie :*

$$\boxed{f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \Rightarrow g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} f(x)}$$

3. *Transitivité :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} h(x)}$$

1.2.4 Équivalents et limites

Théoreme 7.

1. *Calcul de limites à l'aide d'un équivalent :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x \to x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell}$$

2. *Calcul d'équivalents à l'aide d'une limite :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell}$$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \\ \ell \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)}$$

Remarque 4. Attention, on n'écrira jamais $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} 0$.

Remarque 5. Attention si $\ell = 0$, c'est beaucoup plus délicat. Par exemple :

$$\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{mais} \quad \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} \quad \text{est faux}$$

1.2.5 Calculs d'équivalents en pratique

Théoreme 8.

1. *Compatibilité avec le produit :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad f(x)\times h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)\times t(x)}$$

2. *Compatibilité avec le quotient :*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ h(x) \underset{x\to x_0}{\sim} t(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \frac{g(x)}{t(x)}}$$

3. *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big(f(x)\big)^n \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^n}$$

4. *Compatibilité avec l'élévation à la puissance $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:*

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ g > 0 \textit{ dans un voisinage de } x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \big(f(x)\big)^\alpha \underset{x\to x_0}{\sim} \big(g(x)\big)^\alpha}$$

5. *Compatibilité avec la valeur absolue :*

$$\boxed{f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \quad \Rightarrow \quad \big|f(x)\big| \underset{x\to x_0}{\sim} \big|g(x)\big|}$$

Exemple 6. Simplification d'un terme ayant une limite finie dans un produit :

1. $e^x \ln(x) \underset{x\to 0}{\sim} e^0 \times \ln(x) = \ln(x)$.
2. $\dfrac{\ln(x)}{2\,e^{\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{2\,e^0} = \dfrac{1}{2}\ln(x)$.
3. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\sqrt{1}} = e^{\frac{1}{x}}$.

Exemple 7.

1. $e^x + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$ (recherche du terme dominant)

2. $e^x \times \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x \times \ln(x)$ (on ne peut pas simplifier un produit si aucun des deux termes de ce produit ne se simplifie)
3. $(e^x+1)\ \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x \ln(x)$ (compatibilité avec le produit)
4. $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e^x}} = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{2}}}$ (compatibilité avec l'élévation à la puissance $1/2$ et avec le quotient)
5. $\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-x}$ (compatibilité avec l'élévation à la puissance 2 et avec le quotient)
6. Limite en $+\infty$ de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{(3x+4)^3(8x^{-2}+2x^{-4})}{9x+10}$?
$$\frac{(3x+4)^3\left(8x^{-2}+2x^{-4}\right)}{9x+10} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{(3x)^3\left(8x^{-2}\right)}{9x} = \frac{3^3x^3\times 8x^{-2}}{9x} = \frac{3^3\ 8x}{9x} = 24$$
7. Limite en $+\infty$ de $\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{e^x-1}\right)$? Tout d'abord :
$$\frac{e^x+x^2}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} = 1$$
donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+x^2}{e^x-1} = 1$. Donc, par composition des limites :
$$\ln\left(\frac{e^x+x^2}{e^x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Par contre, écrire $\ln\left(\dfrac{e^x+x^2}{e^x-1}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(1) = 0$ est faux. (on ne compose pas les équivalents par les fonctions)
8. $$\left.\begin{array}{l} f(x) = x+1 \\ g(x) = x \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$
Par contre, écrire $e^{x+1} = e^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{g(x)} = e^x$ est faux puisque $\dfrac{e^{x+1}}{e^x} = e \neq 1$.

Exemple 8. Attention, on ne somme pas les équivalents ! Considérons l'exemple suivant.
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x+\sqrt{x} \\ g(x) = x+\ln(x) \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$
$$\left.\begin{array}{l} h(x) = -x \\ t(x) = -x \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} t(x)$$
mais écrire $\sqrt{x} = f(x)+h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)+t(x) = \ln(x)$ est faux.

2 Continuité et dérivabilité

2.1 Continuité d'une fonction en un point

Definition 3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On dit que la fonction f est *continue* en x_0 si :
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Méthode. Pour démontrer que f est continue en x_0 dans le cas où $f(x)$ est défini différemment à gauche et à droite de x_0, il faut donc faire deux calculs de limites.

Méthode. On démontre `TOUJOURS` la continuité d'une fonction sur des intervalles `OUVERTS` puis aux points restants (aux bords des intervalles ouverts considérés).

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} (x+1)\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

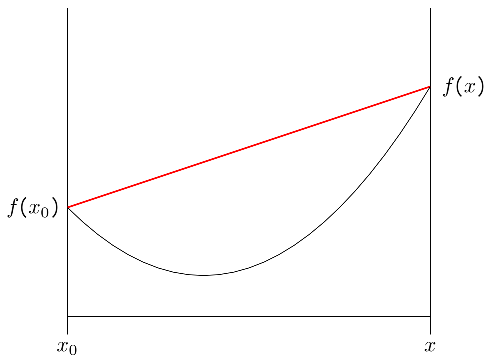
1. Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel x positif et renvoie le réel $f(x)$.
3. Écrire un script **Python** (utilisant la fonction précédente) permettant de tracer le graphe de la fonction f sur le segment $[0, 3]$. On pourra utiliser la commande `np.linspace` ou `np.arange`.

2.2 Taux d'accroissement

Definition 4. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. On appelle *taux d'accroissement* de f en x_0 la fonction :

$$\tau_{x_0}(f) : \left\{ \begin{array}{rcl} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right.$$

Remarque 6 (Interprétation graphique). Notons $M = (x, f(x))$ et $M_0 = (x_0, f(x_0))$ deux points de la courbe représentative de f. Alors $\tau_{x_0}(f)(x)$ est la pente de la corde M_0M.



Remarque 7 (Interprétation physique). Si f décrit l'évolution d'une distance parcourue par un mobile se déplaçant en ligne droite, alors

$$\tau_{x_0}(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est la vitesse moyenne de ce mobile entre l'instant x_0 et l'instant x. En effet, $f(x) - f(x_0)$ est la distance parcourue entre ces deux instants.

2.3 Dérivabilité d'une fonction en un point

Definition 5. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f *est dérivable en* x_0 lorsque la fonction $\tau_{x_0}(f)$ admet une limite finie en x_0.

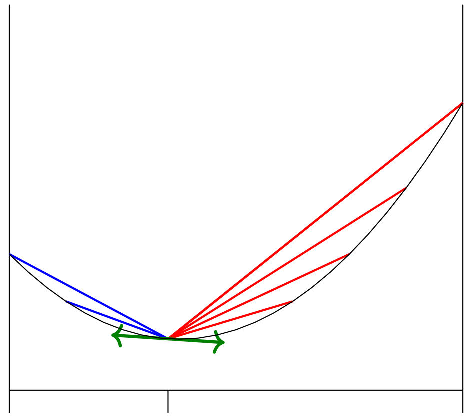
2. Lorsque cette limite existe, elle est appelée *nombre dérivé de f en x_0* et est notée $f'(x_0)$. Autrement dit, sous réserve d'existence :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$$

Remarque 8. Dire qu'une fonction f est dérivable en x_0 c'est dire que la fonction taux d'accroissement se prolonge par continuité en x_0 en posant $\tau_{x_0}(f)(x_0) = f'(x_0)$.

Exemple 9. La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0.

Remarque 9 (Interprétation graphique).



Exercice 4 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Démontrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Que vaut $f'(0)$?

2.4 Tangentes à la courbe représentative

Definition 6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

1. Si f est dérivable en x_0, on appelle *tangente de f en x_0* la droite passant par $(x_0, f(x_0))$ de coefficient directeur $f'(x_0)$. Autrement dit, c'est la droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

2. Si f est dérivable à gauche en x_0, on appelle *demi-tangente à gauche de f en x_0* la demi-droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0)$$

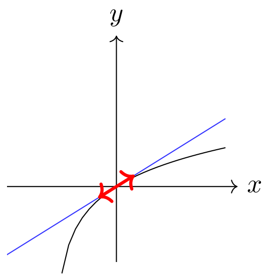
3. Si f est dérivable à droite en x_0, on appelle *demi-tangente à droite de f en x_0* la demi-droite d'équation :

$$y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0)$$

Exemple 10. 1. La tangente de $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ en 0 a pour équation :

$$y = x$$

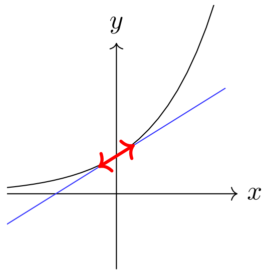
En effet, $f(0) = \ln(1) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. On en déduit que pour tout $x > -1$, $\ln(1 + x) \leqslant x$ par concavité. Représentation de la tangente :



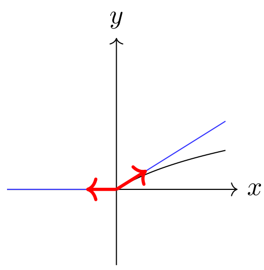
2. La tangente de $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ en 0 a pour équation :

$$y = x + 1$$

En effet, $f(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et $f'(x) = \mathrm{e}^x$ donc $f'(0) = 1$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1$ par convexité. Représentation de la tangente :



3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. La fonction f admet deux demi-tangentes en 0.

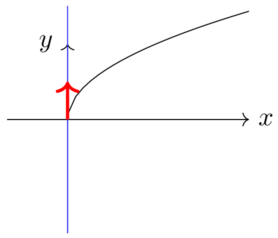


Definition 7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Supposons que :

1. f est continue en x_0
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \tau_{x_0}(f)(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$) *(f est donc non dérivable en x_0)*

On appelle alors *tangente verticale de f en x_0* la droite verticale passant par le point $(x_0, f(x_0))$. Autrement dit, c'est la droite d'équation $x = x_0$.

Exemple 11. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$. La fonction f admet une tangente verticale en 0.



2.5 Démontrer de la régularité pour une composée

Méthode. Soit $f = g \circ h$. On veut montrer que f est dérivable sur un intervalle I. La démonstration suit toujours le même schéma :

- la fonction g est dérivable sur J (on donne ici le plus grand intervalle J possible)
- la fonction h est dérivable sur I et vérifie $h(I) \subset J$

On peut alors conclure que f est dérivable sur I.

Remarque 10. On peut remplacer « dérivable » par « continue » ou « de classe $\mathcal{C}^1$ » ou « de classe $\mathcal{C}^2$ ».

Exercice 5 : Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 4)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3 Tracer la courbe représentative d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On veut tracer $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de f.

Ordre des tracés :

1. On place les points remarquables
   - $(x_0, 0)$ si $f(x_0) = 0$ (points d'intersection du graphe et de l'axe des abscisses)
   - $(x_0, f(x_0))$ si $f'(x_0) = 0$ (points où le graphe admet une tangente horizontale)
   - $(x_0, f(x_0))$ si $f''(x) = 0$ et $f''(x)$ change de signe en x_0 (points d'inflexion)
   - $(x_0, f(x_0))$ si x_0 est au bord de l'intervalle I
2. On place les tangentes remarquables
   - les tangentes horizontales
   - les (demi-)tangentes calculées aux questions précédentes
   - les tangentes verticales
3. On trace les éventuelles asymptotes verticales et horizontales
4. On trace la courbe d'un seul coup de crayon, en passant par les points remarquables, en suivant la direction des tangentes et en respectant les contraintes suivantes :
   (a) La monotonie doit être respectée sur les différents intervalles
   (b) Le graphe doit être cohérent avec les limites calculées
   (c) En cas d'étude de la dérivée seconde, il faut respecter la concavité/convexité de la courbe

Remarque 11. Il vaut parfois mieux placer des points après avoir tracé la courbe pour faciliter un tracé qui ait l'air « naturel ». C'est en particulier le cas pour les points d'intersection avec l'axe des abscisses.

Exercice 6 : Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 7 : Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	2

et on suppose que $f'(0) = -2$. Tracer $\mathscr{C}_f$.

Exercice 8 : Soit $f :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	1		α		2		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$\Vert$		$+$		0	$-$	
Variations de f	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

et le tableau de variations de f' est donné par

x	1		2		β		$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$\Vert$		$-$		0	$+$	
Variations de f'	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$f'(\beta)$	$\nearrow$	0

Tracer $\mathscr{C}_f$.