# Table des matières

# 1 Rappels sur les fonctions de répartition

## 1.1 Définition et propriétés

**Definition 1.** Soit $X$ une v.a.r. . On appelle *fonction de répartition de $X$* et on note $F_X$ l'application :

$$F_X : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathbb{P}([X \leqslant x]) \end{array} \right.$$

**Théoreme 1** (Propriétés des fonctions de répartition)**.** *Soit $X$ une v.a.r. . La fonction de répartition $F_X$ vérifie les propriétés suivantes.*

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ 0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$.
2. *$F_X$ est croissante sur $\mathbb{R}$.*
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$
4. *$F_X$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$. Autrement dit :* $\forall x \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} F_X(t) = F_X(x)$
5. *$F_X$ admet une limite finie à gauche en tout point de $\mathbb{R}$. Plus précisément :*
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{\substack{t \to x \\ t < x}} F_X(t) = F_X(x) - \mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([X < x])$$
6. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X$ est continue en $x$ si et seulement si* $\mathbb{P}([X = x]) = 0$

**Théoreme 2** (La fonction de répartition caractérise la loi)**.** *Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. . Les v.a.r. $X$ et $Y$ suivent la même loi si et seulement si $F_X = F_Y$.*

**Théoreme 3.** *Soit $X$ une v.a.r. . Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.*

1. $\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a)$
2. $\mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]) = F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X = a])$

## 1.2 Méthode pour démontrer qu'une fonction est une fonction de répartition

**Théoreme 4** (Caractérisation des fonctions de répartition)**.** *Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Il existe une v.a.r. $X$ telle que $F$ soit la fonction de répartition de $X$ si et seulement si*

1. *$F$ est croissante,*
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$,
3. *$F$ est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$.*

*Remarque* 1. Si $F$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors le troisième point est vérifié.

**Exercice 1 :** Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de $F$.
2. Montrer que $F$ peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. $X$.
3. Reconnaître la loi suivie par $X$.

**Exercice 2 :** Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de $F$.
2. Montrer que $F$ n'est pas une fonction de répartition.

**Exercice 3 :** Soit $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$.

1. Tracer le graphe de $F$.
2. Montrer que $F$ peut être considérée comme la fonction de répartition d'une v.a.r. $X$.
3. Reconnaître la loi suivie par $X$.

# 2 Les v.a.r. à densité : le point de vue des fonctions de répartition

## 2.1 Définitions

**Definition 2.** Soit $X$ une v.a.r. . On dit que la v.a.r. $X$ est une *v.a.r. à densité* (on dira aussi que $X$ *admet une densité*) si sa fonction de répartition $F_X$ est :

1. continue sur $\mathbb{R}$,
2. de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf (éventuellement) en un nombre fini de points.

Autrement dit, $X$ est une v.a.r. à densité si il existe des nombres réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ tels que

1. $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ (attention : même aux points $x_i$).
2. $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $\ldots$,$]x_{n-1}, x_n[$ et $]x_n, +\infty[$.

*Exemple* 1. La fonction $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ étudiée dans l'exo 3 est la fonction de répartition d'une v.a.r. $X$.

De plus, $F$ est :

- continue sur $\mathbb{R}$
- de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles ouverts $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

On peut en déduire que $X$ est une v.a.r. à densité (et c'est bien heureux puisque il s'agit d'une loi usuelle : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$).

**Definition 3.** Donner la loi d'une v.a.r. à densité $X$, c'est donner :

1. $X(\Omega)$
2. sa fonction de répartition $F_X$

## 2.2 Méthode pour démontrer qu'une v.a.r. est à densité

*Méthode.* Pour montrer que $X$ est à densité, on procède en trois étapes :

1. On calcule $F_X$, la fonction de répartition de $X$. L'expression de $F_X(x)$ va dépendre de plusieurs cas. Par exemple :

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} F_1(x) & \text{si } x < x_1 \\ F_2(x) & \text{si } x_1 \leqslant x \leqslant x_2 \\ F_3(x) & \text{si } x > x_2 \end{cases}$$

2. On montre ensuite que $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et donc a fortiori continue) sur les intervalles **ouverts** $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$. La preuve se fait ainsi :
   - $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, x_1[$ car $x \mapsto F_1(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, x_1[$
   - $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_1, x_2[$ car $x \mapsto F_2(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_1, x_2[$
   - $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_2, +\infty[$ car $x \mapsto F_3(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x_2, +\infty[$
3. Pour finir, on montre que $F_X$ est continue aux points de recollements $x_1$ et $x_2$. Précisément, on montre que
   - $\lim\limits_{\substack{x \to x_1 \\ x < x_1}} F_X(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_1 \\ x < x_1}} F_1(x) = F_X(x_1)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_1 \\ x > x_1}} F_X(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_1 \\ x > x_1}} F_2(x) = F_X(x_1)$

- $\lim\limits_{\substack{x \to x_2 \\ x < x_2}} F_X(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_2 \\ x < x_2}} F_2(x) = F_X(x_2)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to x_2 \\ x > x_2}} F_X(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_2 \\ x > x_2}} F_3(x) = F_X(x_2)$

**Exercice 4 :** Soit $a > 0$. Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. de fonctions de répartition respectives

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-ax^2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que $X$ et $Y$ sont deux v.a.r. à densité.

## 2.3 Propriétés des v.a.r. à densité en lien avec la fonction de répartition

**Théoreme 5.** *Soit $X$ une v.a.r. à densité. Alors sa fonction de répartition $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}\big([X = x]\big) = 0}$$

*Remarque* 2. Cette propriété des v.a.r. à densité (qui les rend très différentes des v.a.r. discrètes) est étonnante et contre intuitive au premier abord. Elle semble impliquer que, pour toute partie $A$ de $\mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}([X \in A]) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in A} [X = x]\right) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}([X = x]) = \sum_{x \in A} 0 = 0$$

et donc, en particulier pour $A = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}([X \in \mathbb{R}]) = 0$ ? Ce résultat est absurde puisque $X$ est à valeurs réelles par définition donc $[X \in \mathbb{R}] = \Omega$. Où est l'erreur ?

Le calcul précédent est faux lorsque $A$ n'est pas dénombrable, par exemple lorsque $A$ est un intervalle non réduit à un point. Ainsi, la propriété du théorème précédent n'empêche pas d'avoir des résultats comme $\mathbb{P}([1 \leqslant X \leqslant 2]) = \frac{1}{4}$ ou $\mathbb{P}([0 < X \leqslant 10]) = \frac{1}{2}$ par exemple.

On comprend alors que les v.a.r. à densité sont adaptées pour modéliser des phénomènes continus, tels que l'écoulement du temps. Typiquement, on pourra modéliser le temps d'attente d'un bus par une v.a.r. à densité.

**Théoreme 6** (Calculer une probabilité à l'aide d'une fonction de répartition)**.** *Soit $X$ une v.a.r. à densité. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.*

$$\begin{aligned} F_X(b) - F_X(a) &= \mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \\ &= \mathbb{P}([a < X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leqslant X < b]) \\ &= \mathbb{P}([a \leqslant X \leqslant b]) \end{aligned}$$

**A retenir.** Pour les v.a.r. à densité, les calculs de probabilité ne dépendent pas de la nature des inégalités. On peut donc changer une inégalité stricte en une inégalité large et vice-versa.

## 2.4 Toutes les v.a.r. ne sont pas à densité

**Proposition 7.** *Les v.a.r. discrètes ne sont pas à densité.*

*Démonstration.* Soit $X$ une v.a.r. discrète. Alors il existe $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}([X = x]) > 0$. On en déduit que $X$ n'est pas une v.a.r. à densité. □

**Exercice 5 :** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. On pose $Y = \max(1, X)$.

1. Rappeler $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de $X$.
2. Soit $h : x \mapsto \max(1, x)$. Dresser le tableau de variations de $h$ puis déterminer $h([0, +\infty[)$.

3. Déterminer $Y(\Omega)$ et la fonction de répartition de $Y$.
4. Représenter graphiquement cette fonction de répartition.
5. $Y$ est-elle une v.a.r. à densité ? une v.a.r. discrète ?

*Démonstration.*

1. D'après le cours : $X(\Omega) = [0, +\infty[$ et

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

2. On a $h : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$. D'où le tableau de variations de $h$ :

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $h'(x)$ | $0$ | \|\| | $+$ |
| Variations de $h$ | $1 \longrightarrow$ | $1$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

On en déduit que $h([0, +\infty[) = [1, +\infty[$.

3. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= (h(X))(\Omega) \\ &= h(X(\Omega)) \\ &= h([0, +\infty[) \\ &= [1, +\infty[ \end{aligned}$$

Déterminons la fonction de répartition de $Y$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x < 1$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [1, +\infty[$. On a alors :

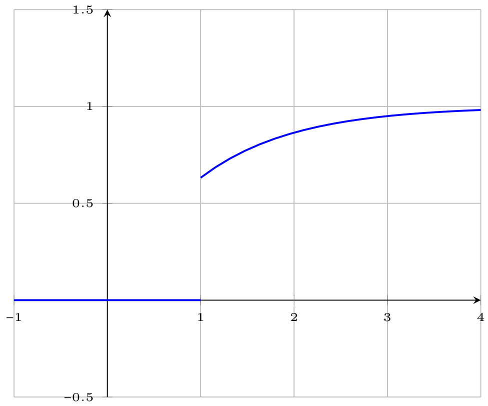
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

- Si $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([\max(1, X) \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([1 \leqslant x] \cap [X \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(\Omega \cap [X \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant x]) && \text{(car } x \geq 1\text{)} \\ &= F_X(x) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

Finalement, $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

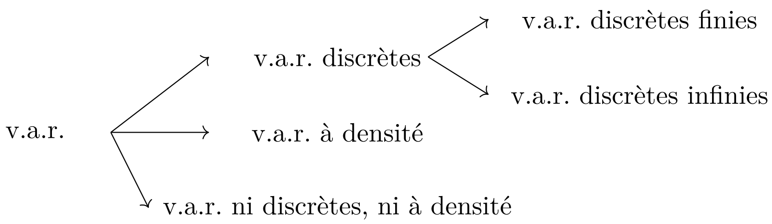
4. La fonction $F_Y$ admet la représentation graphique suivante.




5. - $F_Y$ n'est pas continue en 1, donc $Y$ n'est pas une v.a.r. à densité.
   - $Y(\Omega) = [1, +\infty[$ n'est pas dénombrable, donc $Y$ n'est pas une v.a.r. discrète.

□

On peut classifier les v.a.r. avec le diagramme suivant :




# 3 Les v.a.r. à densité : le point de vue des densités

## 3.1 Définition

**Definition 4.** Soit $X$ une v.a.r. à densité. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ est une *densité de* $X$ si :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) \geq 0$
2. $f$ coïncide avec $F_X'$ sauf en un nombre fini de points.

Autrement dit, $f$ est une densité de $X$ si il existe des réels $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ tels que :

1. $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad f(x) = F_X'(x)$ (on a nécessairement $F_X'(x) \geqslant 0$ car $F_X$ est croissante)
2. $\forall x \in \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad f(x_i) \geqslant 0$

*Remarque* 3. Toute v.a.r. à densité possède une infinité de densités (on peut choisir la valeur positive que l'on souhaite en chacun des points $x_i$).

## 3.2 Méthode pour déterminer une densité à partir de la fonction de répartition

*Méthode* (Lorsque la densité n'est pas donnée dans l'énoncé)*.* On commence par donner une expression explicite de $F_X$ (le plus souvent on doit distinguer plusieurs cas, $F_X$ est définie « par morceaux »). A chaque morceau va correspondre un intervalle ouvert. On définit alors une densité de $X$ en deux temps :

- Sur chaque intervalle ouvert où $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et possède une unique expression explicite), on pose

$$\boxed{f(x) \overset{\text{def}}{=} F_X'(x)}$$

- Aux points restants (aux bords des intervalles ouverts), on pose

$$\boxed{f(x) \overset{\text{def}}{=} 0}$$

**Exercice 6 :** On considère une v.a.r. à densité $X$, dont la fonction de répartition est

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer une densité de $X$.

*Méthode* (Lorsque la densité est donnée dans l'énoncé). Il suffit de vérifier la définition. La vérification se fait en deux temps :

- On commence par montrer que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0}$$

- Sur chaque intervalle ouvert où $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (et possède une unique expression explicite), on calcule $F_X'(x)$ et on vérifie que :

$$\boxed{F_X'(x) = f(x)}$$

**Exercice 7 :** On considère une v.a.r. à densité $X$, dont la fonction de répartition est

$$F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

est une densité de $X$.

### 3.3 Méthode pour déterminer la fonction de répartition à partir d'une densité

**Théoreme 8** (Formule fondamentale). *Soit $X$ une v.a.r. admettant une densité notée $f$. Alors*

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t}$$

**Corollaire 9.** *Soit $X$ une v.a.r. admettant une densité notée $f$. Soit $I$ un intervalle. Si $f$ est nulle en dehors de $I$ et est strictement positive sur $I$, alors on peut considérer que $X(\Omega) = I$.*

**Théoreme 10.** *Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. . Si $X$ et $Y$ admettent une même densité $f$, alors $X$ et $Y$ suivent la même loi.*

*Démonstration.* D'après la formule fondamentale :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = F_Y(x)$$

Donc $X$ et $Y$ ont la même fonction de répartition et donc suivent la même loi car la fonction de répartition caractérise la loi. □

**A retenir.** La loi d'une v.a.r. à densité est caractérisée par la donnée d'une densité.

**Exercice 8 :** On considère une v.a.r. à densité $X$, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Déterminer $X(\Omega)$ et la fonction de répartition de $X$.

**Corollaire 11.** *Soit $X$ une v.a.r. admettant une densité notée $f$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

1. *La fonction $F_X$ est de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point où $f$ est continue. De plus, si $f$ est continue en $x \in \mathbb{R}$, alors $F'(x) = f(x)$.*
2. $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1}$
3. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$\boxed{\mathbb{P}([X < a]) \;=\; \mathbb{P}([X \leqslant a]) \;=\; \int_{-\infty}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

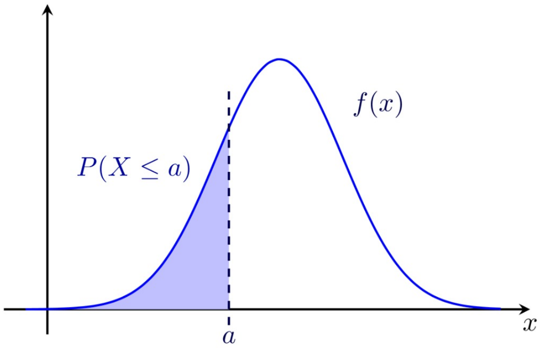
*et*

$$\boxed{\mathbb{P}([X > b]) = 1 - \mathbb{P}([X \leqslant b]) = 1 - F_X(b) = \int_{b}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

4. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, *si $a \leqslant b$, on a :*

$$\boxed{\mathbb{P}([a < X \leqslant b]) \;=\; F_X(b) - F_X(a) \;=\; \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

*Remarque* 4. Ce théorème illustre l'intérêt des v.a.r. à densité : on obtient la valeur de la fonction de répartition $F_X$ et donc la loi de $X$ sous forme d'un calcul d'intégrales (éventuellement impropres).




*Remarque* 5. On retrouve alors le résultat $\mathbb{P}([X = x]) = 0$. En effet,

$$\mathbb{P}([X = x]) = \mathbb{P}([x \leqslant X \leqslant x]) = F_X(x) - F_X(x) = \int_{x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

**Exercice 9 :** On considère une v.a.r. à densité $X$, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } 1 \leqslant x \leqslant \mathrm{e} \\ 0 & \text{si } x > \mathrm{e} \end{cases}$$

Calculer $\mathbb{P}([X \leqslant 2])$ puis $\mathbb{P}\left(\left[\frac{3}{2} < X < \frac{5}{2}\right]\right)$.

## 3.4 Méthode pour démontrer qu'une fonction est une densité de probabilité

**Definition 5.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ est une *densité de probabilité* si il existe une v.a.r. à densité $X$ telle que $f$ est une densité de $X$.

**Théoreme 12** (Caractérisation des densités de probabilité)**.** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. $f$ est une densité de probabilité si et seulement si*

1. *$f$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points,*
2. *$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,*
3. *$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut 1.*

**Exercice 10 :** On définit une fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leqslant x < 0 \\ 1-x & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant x \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de $f$ puis montrer que $f$ est une densité de probabilité.
2. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$. Expliciter $F_X$.
3. Calculer $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right)$ et $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \frac{1}{3}\right]\right)$.

*Démonstration.* 1. D'après le théorème précédent, il s'agit de démontrer que $f$ vérifie trois propriétés.

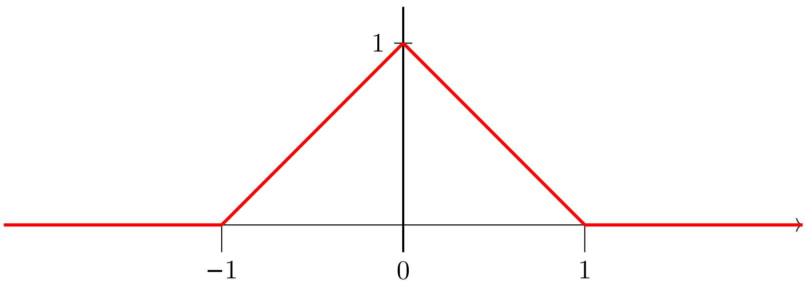
(a) La fonction $f$ est continue sur $]-\infty, -1[$, sur $]-1, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$. Par exemple, si $x \in [-1, 0[$, alors $0 \leqslant 1 + x < 1$ et donc $f(x) \geq 0$ si $x \in [-1, 0[$.

(c) Notons $U(y) = \displaystyle\int_y^0$ pour $y \leqslant -1$. On a alors :

$$\begin{aligned} \int_y^0 f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_y^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^0 (1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\, t + \frac{t^2}{2} \,\right]_{-1}^0 \\ &= -\left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \underset{y\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. On démontre de même que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.




2. La densité de probabilité $f$ étant définie par cas, il en est (a priori) de même pour $F_X$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Quatre cas se présentent.

(a) Si $x < -1$ : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^x 0\,\mathrm{d}t = 0$.

(b) Si $-1 \leqslant x < 0$ : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^x (1+t)\,\mathrm{d}t$

Or : $\displaystyle\int_{-1}^x (1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\, t + \frac{t^2}{2} \,\right]_{-1}^x = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(-1 + \frac{(-1)^2}{2}\right)$

et donc $F_X(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

(c) Si $0 \leqslant x < 1$ : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0 \ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} (1+t) \ \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} (1-t) \ \mathrm{d}t$

Or : $\displaystyle\int_0^x (1-t) \ \mathrm{d}t = \left[ t - \frac{t^2}{2} \right]_0^x = \left( x - \frac{x^2}{2} \right)$ et $\displaystyle\int_{-1}^{0} (1+t) \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$

et donc $F_X(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2}$.

(d) Si $x \geqslant 1$ : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} 0 \ \mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} f(t) \ \mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0 \ \mathrm{d}t$

et donc $F_X(x) = 1$.

3. Il y a deux manières de rédiger cette question :

(a) $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t) \ \mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} 0 \ \mathrm{d}t$

Or : $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} (1-t) \ \mathrm{d}t = \left[ t - \frac{t^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} \right) = \frac{1}{8}$

(b) $\mathbb{P}\left(\left[X > \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant \frac{1}{2}\right]\right) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$

car $F_X\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

On peut aussi utiliser l'une ou l'autre de ces rédactions pour la question suivante :

(a) $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} f(t) \ \mathrm{d}t = 2\int_{0}^{\frac{1}{3}} f(t) \ \mathrm{d}t$

par parité. Or : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} (1-t) \ \mathrm{d}t = \left[ t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{18} = \frac{5}{18}$

(b) $\mathbb{P}\left(\left[|X| \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{3} \leqslant X \leqslant \frac{1}{3}\right]\right) = F_X\left(\frac{1}{3}\right) - F_X\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{9}$ car $F_X\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{(\frac{1}{3})^2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{9}$

et $F_X\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{(-\frac{1}{3})^2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{9}$

$\square$

**Exercice 11 :** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soit $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha \mathrm{e}^{2x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Déterminer $\alpha$ pour que $f$ soit une densité de probabilité.

*Démonstration.* • Supposons que $f$ soit une densité de probabilité, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t = 1$. Or,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \ \mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t) \ \mathrm{d}t && \text{car } f \text{ est nulle en dehors de } [0,1] \\ &= \int_0^1 \alpha \mathrm{e}^{2t} \ \mathrm{d}t \\ &= \alpha \left[ \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2} \right]_0^1 \\ &= \alpha \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\alpha = \frac{2}{\mathrm{e}^2 - 1}}$.

- Réciproquement, la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2}{e^2-1}e^{2x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ vérifie :
  — $f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$
  — pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$
  — $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$

  donc est bien une densité de probabilité.

□

# 4 Transformation d'une v.a.r. à densité

## 4.1 Transformation affine (au programme)

**Théoreme 13.** *Soit $X$ une v.a.r. à densité. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \neq 0$. Alors la v.a.r. $Y = aX + b$ est une v.a.r. à densité.*

*Remarque* 6. Attention, il ne faut pas confondre **transformation affine** et **combinaison linéaire**.

Si $X$ et $Y$ sont des variables à densité, la v.a.r. $aX + bY$ est-elle à densité ? La réponse est non en général.

On peut par exemple considérer :
- une v.a.r. $X$ à densité,
- et la v.a.r. $Y = 1 - X$ (qui est une transformée affine de $X$, donc est à densité).

Alors $X + Y = 1$, ce qui montre que $(X + Y)(\Omega) = \{1\}$. Ainsi, $X + Y$ n'admet pas de densité puisque c'est une v.a.r. discrète (finie).

L'ensemble des v.a.r. à densité n'est donc pas stable par combinaison linéaire. De ce fait, ce n'est pas un espace vectoriel.

**Exercice 12 :** Déterminer $h(I)$ dans les cas suivants :

1. $h : x \mapsto x + 1$ et $I = [0, 4]$
2. $h : x \mapsto 4x - 5$ et $I = \mathbb{R}$
3. $h : x \mapsto -x + 2$ et $I = [0, +\infty[$
4. $h : x \mapsto -2x + 2$ et $I = [0, 1]$
5. $h : x \mapsto 3x$ et $I = [-1, 1]$
6. $h : x \mapsto 2x + 3$ et $I = [0, +\infty[$
7. $h : x \mapsto 2x + 3$ et $I = [1, +\infty[$
8. $h : x \mapsto -4x + 1$ et $I = [0, 1[$
9. $h : x \mapsto 2x + 4$ et $I = ]-2, 2[$

**Exercice 13 :** Soit $X$ une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. On note $Y = 2X + 1$.
1. Déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.
2. La v.a.r. $Y$ est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.
3. Reconnaître la loi de $Y$.

**Exercice 14 :** Soit $X$ une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 2])$. On note $Y = -3X + 2$.
1. Déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.
2. La v.a.r. $Y$ est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.
3. Reconnaître la loi de $Y$.

**Exercice 15 :** Soit $f : x \mapsto \begin{cases} |x| & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
1. Montrer que $f$ est une densité de probabilité, d'une variable aléatoire que l'on notera $X$.
2. Déterminer la fonction de répartition $F_X$ de $X$.
3. On pose $Y = 1 - 2X$. Déterminer la fonction de répartition de $Y$.
4. Montrer que $Y$ est une v.a.r. à densité, puis déterminer une densité de $Y$.

## 4.2 Transformation polynomiale : élévation au carré (au programme)

**Théoreme 14.** *Soit $X$ une v.a.r. à densité. Alors la v.a.r. $Y = X^2$ est une v.a.r. à densité.*

**Exercice 16 :** Soit $X$ une v.a.r. telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$. Notons $Y = X^2$.

1. Déterminer la fonction de répartition $F_Y$ de $Y$.
2. La v.a.r. $Y$ est-elle à densité ? Si oui, en déduire une densité.

## 4.3 Transformation exponentielle (au programme)

**Théoreme 15.** *Soit $X$ une v.a.r. à densité. Alors la v.a.r. $Y = e^X$ est une v.a.r. à densité.*

**Exercice 17 :** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$. On pose $Y = \mathrm{e}^X$. Déterminer la fonction de répartition puis une densité de $Y$.

## 4.4 Une transformation usuelle (au programme et exo très classique)

**Exercice 18 :** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$ et $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ ?

*Démonstration.*

1. Notons $h : x \mapsto -\frac{1}{\lambda}\ln(1-x)$, de telle sorte que $Y = h(X)$.
   Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$, alors $X(\Omega) = [0,1[$. On en déduit :
$$\begin{aligned} Y(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) \\ &= h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h\big([0,1[\big) \\ &= \left[h(0), \lim_{x\to 1} h(x)\right[ && \text{(car } h \text{ est continue et strictement croissante sur } [0,1[\text{)} \\ &= [0,+\infty[ \end{aligned}$$
2. Déterminons la fonction de répartition de $Y$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent.
   (a) Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) = [0,+\infty[$. Ainsi :
$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$
   (b) Si $x \in [0,+\infty[$ :
$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leqslant x\right]\right) \\ &= \mathbb{P}([\ln(1-X) \geqslant -\lambda x]) && \text{(car } -\lambda < 0\text{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[1-X \geqslant \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) && \text{(car la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}\text{)} \\ &= \mathbb{P}\left(\left[X \leqslant 1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]\right) \\ &= F_X\left(1-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right) \\ &= 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} && \text{(car } 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} \in [0,1[\text{)} \end{aligned}$$

Finalement :
$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\ ]-\infty,0[ \\ 1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0,+\infty[ \end{cases}$$
On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Or, la fonction de répartition caractérise la loi d'une v.a.r. . Ainsi, $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$. □

## 4.5 Valeur absolue d'une v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)

**Exercice 19 :** Soit $X$ une variable aléatoire admettant pour densité la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } x \in [-2,2] \\ 0 & \text{si } x \notin [-2,2] \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de $X$ puis donner sa fonction de répartition $F_X$.
2. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Y = |X|$. La variable aléatoire $Y$ admet-elle une densité ? Si oui, déterminer une densité de $Y$.
3. Déterminer la fonction de répartition de la variable $Z = X + Y$. On pourra considérer le système complet d'événements $([X < 0], [X \geq 0])$. La v.a.r. $Z$ admet-elle une densité ? Si oui, déterminer une densité de $Z$.

## 4.6 Partie entière d'une v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)

**Exercice 20 :**(d'après `EDHEC 2002`)

Pour tout nombre réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière par défaut de $x$, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$. Soit $\lambda > 0$. Soit $X$ une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$. On a donc : $\forall k \in \mathbb{Z},\ [Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$.

1. (a) Montrer que $Y$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (b) Pour tout $k$ de $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}([Y = k-1])$.
   (c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   (d) Donner l'espérance et la variance de $Y + 1$. En déduire l'espérance et la variance de $Y$.
2. On pose $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) En utilisant le système complet d'événements $\big([Y = k]\big)_{k \in \mathbb{N}}$, montrer :
   $$\forall x \in [0,1[\,,\ \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}}{1 - \mathrm{e}^{-\lambda}}$$
   (c) En déduire une densité $f$ de $Z$.

## 4.7 Loi du $\min$ / $\max$ (au programme et exo classique)

**Exercice 21 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $n \geq 2$. Soient $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, de densité $f$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x \in [1, +\infty[ \\ 0 & \text{si } x \in ]-\infty, 1[ \end{cases}$$

1. Vérifier que $f$ est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition $F$ de $X_1$.
3. Étudier l'existence de $\mathbb{E}(X_1)$ et de $\mathbb{V}(X_1)$.
4. On pose $Y = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et $Z = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Vérifier que $Y$ et $Z$ sont des variables aléatoires réelles à densité, puis déterminer une densité de $Y$ et une densité de $Z$. Étudier l'existence des espérances $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(Z)$ de $Y$ et $Z$, et les calculer lorsqu'elles existent.

### 4.8 Loi de la somme de deux v.a.r. à densité (hors-programme mais exo classique)

**Exercice 22 :** (d'après `HEC 2010`)

Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On admet que si $U$ et $V$ sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, alors la v.a.r. $U+V$ est à densité à condition que la fonction $f_{U+V}$ suivante existe. Cette fonction $f_{U+V}$ définit alors une densité de $U+V$.

$$f_{U+V}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_U(t) f_V(x-t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_V(t) f_U(x-t)\ dt$$

1. Montrer que la variable aléatoire $-Y$ est à densité et en déterminer une densité.
2. En déduire, en séparant les cas $x < 0$ et $x \geq 0$, que la variable $Z = X - Y$ admet pour densité :
$$\forall x \in \mathbb{R},\quad f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |x|}$$
3. Démontrer que la variable aléatoire $T = |Z|$ est à densité et en déterminer une densité.

## 5 Espérance d'une v.a.r. à densité

### 5.1 Définition

**Definition 6.** Soit $X$ une v.a.r. de densité $f$.

1. On dit que $X$ admet une espérance, notée $\mathbb{E}(X)$, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$ est absolument convergente.
2. Si c'est le cas, $\boxed{\mathbb{E}(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx}$

*Remarque* 7. Attention, il existe des v.a.r. à densité qui n'admettent pas d'espérance.

**Théoreme 16.** *Soit $X$ une v.a.r. de densité $f$. La v.a.r. $X$ admet une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\ f(x)\ dx$ est convergente.*

*Méthode.* On rédigera comme suit. « La v.a.r. $X$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\ dt$ est absolument convergente, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment. »

D'autre part, il est fréquent que la fonction $f$ soit définie par cas et qu'elle soit nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ (avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$). On poursuivra alors la rédaction comme suit : « D'autre part :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\,f(t)\ \mathrm{d}t \ = \ \int_a^b t\,f(t)\ \mathrm{d}t$$

car la fonction $f$ est nulle en dehors de $[a,b]$. »

**Exercice 23 :** Soit $X$ une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

La v.a.r. $X$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

**Exercice 24 :** Soit $X$ une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x\sqrt{2x}} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

La v.a.r. $X$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

**Exercice 25 :** Soit $X$ une v.a.r. admettant une densité $f$ qui est nulle sur $]-\infty, 0[$, continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$ et continue à droite en 0. On souhaite démontrer l'égalité

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\mathrm{d}t \qquad (*)$$

sous réserve d'existence.

1. Démontrer que si $X$ admet une espérance, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\mathrm{d}t$ converge et $(*)$ est vraie.
2. Démontrer que si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - F_X(t))\mathrm{d}t$ converge, alors $X$ admet une espérance et $(*)$ est vraie.

## 5.2 Propriétés de l'espérance

### 5.2.1 Espérance de la transformée affine d'une v.a.r. à densité

**Théoreme 17.** *Soit $X$ une v.a.r. à densité admettant une espérance. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq 0$. Alors,*

1. *La v.a.r. $aX + b$ est une v.a.r. à densité.*
2. *La v.a.r. $aX + b$ admet une espérance. De plus :* $\boxed{\mathbb{E}(aX + b) = a\,\mathbb{E}(X) + b}$.

### 5.2.2 Linéarité de l'espérance

**Théoreme 18.** *Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. à densité admettant chacune une espérance. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors la v.a.r. $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance. De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\lambda X + \mu Y\big) \;=\; \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mu\,\mathbb{E}(Y)}$$

*Généralisation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. à densité. On suppose que les v.a.r. $X_1, \ldots, X_n$ admettent chacune une espérance. Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors la v.a.r. $\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n$ admet une espérance. De plus :*

$$\boxed{\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\mathbb{E}(X_i)}$$

*Remarque* 8. Ces deux théorèmes nous fournissent des arguments permettant de démontrer qu'une v.a.r. admet une espérance. On pourra rédiger comme suit :

1. la v.a.r. $Z$ admet une espérance car elle est la transformée affine d'une v.a.r. qui admet une espérance.
2. la v.a.r. $Z$ admet une espérance en tant que somme / combinaison linéaire de v.a.r. qui admettent chacune une espérance.

**Exercice 26 :** Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$. On note $Y$ la v.a.r. définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\; Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } X(\omega) \leqslant 0 \\ X(\omega) & \text{si } X(\omega) > 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition de $Y$ puis tracer son graphe. La v.a.r. $Y$ est-elle une v.a.r. à densité ?
2. Justifier que $Y = \dfrac{X + |X|}{2}$.
3. Déterminer la loi de $Z = |X|$.
4. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

*Démonstration.*

1. Par définition de la v.a.r. $Y$, $Y(\Omega) \subset [0, +\infty[\; \cap\; X(\Omega) = [0, 1]$. Déterminons la fonction de répartition de $Y$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.
   (a) Si $x < 0$, alors $[Y \leqslant x] = \varnothing$ car $Y(\Omega) \subset [0, 1]$. Ainsi :
   $$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

(b) Si $x \in [0,1]$. La famille $([X \leqslant 0], [X > 0])$ forme un système complet d'événements. Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([Y \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([Y \leqslant x] \cap [X > 0]) \\ &= \mathbb{P}([0 \leqslant x] \cap [X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([X \leqslant x] \cap [X > 0]) \\ &= \mathbb{P}([X \leqslant 0]) + \mathbb{P}([0 < X \leqslant x]) \end{aligned}$$

Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$, on a :

$$\mathbb{P}([X \leqslant 0] = \int_{-1}^{0} \frac{1}{2} \, dt = \frac{1}{2} \left[\, t \,\right]_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$

De plus, comme $x \in [0,1]$ :

$$\mathbb{P}([0 < X \leqslant x]) = \int_0^x f(t) \, dt = \int_0^x \frac{1}{2} \, dt = \frac{1}{2} \left[\, t \,\right]_0^x = \frac{x}{2}$$

(c) Si $x > 1$, alors $[Y \leqslant x] = \Omega$ car $Y(\Omega) \subset [0,1]$. Ainsi :

$$F_Y(x) = \mathbb{P}([Y \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

Finalement : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La fonction $F_Y$ admet la représentation graphique suivante.

La fonction $F_Y$ n'est pas continue en 0. Ainsi $Y$ n'est pas une v.a.r. à densité.

La fonction $F_Y$ n'est pas constante par morceaux, donc $Y$ n'est pas une v.a.r. discrète.

2. Soit $\omega \in \Omega$. Deux cas se présentent.

(a) Si $X(\omega) \leqslant 0$, alors :

$$(X + |X|)(\omega) = X(\omega) + (|X|)(\omega) = X(\omega) + (-X)(\omega) = 0 = Y(\omega)$$

(b) Si $X(\omega) > 0$, alors :

$$\left(\frac{X + |X|}{2}\right)(\omega) = \frac{X(\omega) + (|X|)(\omega)}{2} = \frac{X(\omega) + X(\omega)}{2} = \frac{2X(\omega)}{2} = X(\omega) = Y(\omega)$$

Finalement, on a bien : $\dfrac{X + |X|}{2} = Y$.

3. (a) Notons $h : x \mapsto |x|$, de sorte que $Z = h(X)$. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([-1,1])$, alors $X(\Omega) = [-1,1]$. On en déduit :

$$\begin{aligned} Z(\Omega) &= \big(h(X)\big)(\Omega) \\ &= h\big(X(\Omega)\big) \\ &= h([-1,1]) \\ &= [0,1] && \text{(par définition de } h\text{)} \end{aligned}$$

(b) Déterminons la fonction de répartition de $Z$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent.

i. Si $x < 0$, alors $[Z \leqslant x] = \varnothing$ car $Z(\Omega) = [0,1]$. Donc on a :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

ii. Si $x > 1$, alors $[Z \leqslant x] = \Omega$ car $Z(\Omega) = [0,1]$. Donc on a :

$$F_Z(x) = \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

iii. Si $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= \mathbb{P}([Z \leqslant x]) = \mathbb{P}([|X| \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}([-x \leqslant X \leqslant x]) \\ &= \int_{-x}^{x} f_X(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-x}^{x} \frac{1}{2}\ \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\ t\ \right]_{-x}^{x} = x \end{aligned}$$

On reconnaît une loi usuelle : $|X| \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

4. La v.a.r. $Y$ admet une espérance en tant que somme de v.a.r. qui en admettent. Par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{X + |X|}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(|X|)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

□

#### 5.2.3 Espérance du produit de deux v.a.r. indépendantes

**Théoreme 19.** *Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. à densité. On suppose que*

1. *$X$ et $Y$ admettent une espérance.*
2. *$X$ et $Y$ sont indépendantes.*

*Alors $XY$ admet une espérance et* $\boxed{\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)}$.

*Remarque* 9. Il est possible que $XY$ ne soit pas une v.a.r. à densité. Dans ce cas, on ne sait pas comment est défini $\mathbb{E}(XY)$, mais qu'importe, on sait calculer cette espérance dans ce cas.

#### 5.2.4 Croissance de l'espérance

**Théoreme 20.** *Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. à densité. On suppose que $X$ et $Y$ admettent chacune une espérance.*

$$\boxed{\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = 1 \ \Rightarrow\ \mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)}$$

*En particulier, si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leqslant Y(\omega)$, alors $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$.*

# 6 Moments d'une v.a.r. à densité

## 6.1 Définition

**Definition 7** (Moments d'ordre $r$)**.** Soit $X$ une v.a.r. de densité $f$ et soit $r \in \mathbb{N}$.

1. On dit que $X$ *admet un moment d'ordre* $r$, noté $m_r(X)$, si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\ f(x)\ dx$ est absolument convergente (ce qui revient à démontrer la convergence pour ces calculs de moment).
2. Sous réserve d'existence, on a : $\boxed{m_r(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r\ f(x)\ dx}$

## 6.2 Théorème de transfert

**Théoreme 21.** *Soit $X$ une v.a.r. admettant une densité $f$ nulle en dehors d'un intervalle $]a,b[$ (où $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$). On considère une fonction $g : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ continue sur $]a,b[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors la v.a.r. $g(X)$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b g(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ converge absolument et, dans ce cas :*

$$\boxed{\mathbb{E}(g(X)) = \int_a^b g(t)f(t)\ \mathrm{d}t}$$

*Remarque* 10. Ici, encore une fois, on ne sait pas si $g(X)$ est encore une v.a.r. à densité. On s'en fiche, sous ces hypothèses on peut calculer son espérance sans savoir la définir.

**Corollaire 22.** *Soit $X$ une v.a.r. à densité et soit $r \in \mathbb{N}$. Sous réserve d'existence,* $\boxed{m_r(X) = \mathbb{E}(X^r)}$

# 7 Variance d'une v.a.r. à densité

## 7.1 Definition

**Definition 8.** Soit $X$ une v.a.r. à densité.

1. Si la v.a.r. $X$ admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ et que la v.a.r. $(X - \mathbb{E}(X))$ admet un moment d'ordre 2, on dit que $X$ *admet une variance*, notée $\mathbb{V}(X)$, et

$$\boxed{\mathbb{V}(X) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)}$$

2. Sous ces hypothèses on appelle *écart-type* et on note $\sigma(X)$ le réel $\boxed{\sigma(X) \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbb{V}(X)}}$.

## 7.2 Détermination en pratique de la variance

**Théoreme 23** (Formule de Kœnig-Huygens)**.** *Soit $X$ une v.a.r. à densité. La v.a.r. $X$ admet une variance ssi la v.a.r. $X$ admet un moment d'ordre 2 et si c'est le cas :*

$$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2}$$

**Exercice 27 :** Soit $X$ une v.a.r. de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

La v.a.r. $X$ admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

**Exercice 28 :** On considère une v.a.r. à densité $X$, dont une densité est

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 3x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La v.a.r. $X$ admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

## 7.3 Variance d'une somme de v.a.r. indépendantes

**Théoreme 24.** *Soient $X$ et $Y$ deux v.a.r. à densité. On suppose que $X$ et $Y$ admettent chacune un moment d'ordre 2 (*i.e.* $X$ et $Y$ admettent une variance). Alors la v.a.r. $X + Y$ admet une variance. De plus :*

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)}$$

*Généralisation : soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.r. à densité mutuellement indépendantes et qui admettent chacune un moment d'ordre 2. Alors $X_1 + \ldots + X_n$ admet une variance et*

$$\mathbb{V}(X_1 + \ldots + X_n) = \mathbb{V}(X_1) + \ldots + \mathbb{V}(X_n)$$

### 7.4 Variables centrées / réduites

**Definition 9.** Soit $X$ une v.a.r. à densité.

1. Si $X$ admet une espérance égale à 0 on dit que $X$ est une variable centrée.
2. Si $X$ admet une variance égale à 1 on dit que $X$ est une variable réduite.
3. Si $X$ admet une variance non nulle, la variable $\boxed{X^* \overset{\text{def}}{=} \dfrac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}}$ est appelée variable centrée réduite associée à $X$.