

Exercices de cours

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Démontrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
2. Écrire une fonction **Python** qui prend en argument un réel x positif et renvoie le réel $f(x)$.
3. Écrire un script **Python** (utilisant la fonction précédente) permettant de tracer le graphe de la fonction f sur le segment $[0, 3]$. On pourra utiliser la commande `np.linspace` ou `np.arange`.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Démontrer que f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Que vaut $f'(0)$?

Exercice 5 : Soit $f : x \mapsto \ln(x^2 + 2x + 4)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	1	$+\infty$

Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 7 : Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	1	0	2

et on suppose que $f'(0) = -2$. Tracer $\mathcal{C}_f$.

Exercice 8 : Soit $f :]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que le tableau de variations de f est donné par

x	1	α	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Variations de f		$-\infty$ $\nearrow$ 0	$\searrow$ 2 $\searrow$ 0	

et le tableau de variations de f' est donné par

x	1	2	β	$+\infty$
Signe de $f''(x)$		-	0	+
Variations de f'		$+\infty$ $\searrow$ 0	$\searrow$ $f'(\beta)$ $\searrow$ 0	

Tracer $\mathcal{C}_f$.

Calculs de limites et d'équivalents

Exercice 9 : À l'aide d'équivalents, déterminer les limites suivantes.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x \ln(1+x)}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$
où $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(x+1) - x \ln(x)$

Exercice 10 : Calculer les limites des fonctions suivante aux points indiqués.

1. $f_1 : x \mapsto \frac{\ln(x) + x - 1}{x + e^{-x}}$
en 0^+ et en $+\infty$.

3. $f_3 : x \mapsto \frac{xe^x + 1}{e^x + 1}$
en 0^+ en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. $f_5 : x \mapsto \frac{x \ln(x) + \ln(x)}{\sqrt{x+1}}$
en 0^+ et en $+\infty$.

2. $f_2 : x \mapsto \ln(e^{-x} + x^{-2})$
en 0^+ et en $+\infty$.

4. $f_4 : x \mapsto x^4 e^{-\sqrt{x}}$
en $+\infty$.

6. $f_6 : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$
en 0^+ et en $+\infty$.

Études de fonctions

Exercice 11 : Soit $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$ définie sur $] -2, +\infty[$.

- Calculer, pour tout $x > -2$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
- En déduire le tableau de variations de f et de f' .
- Tracer le graphe de f .

Exercice 12 : Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^{1+\frac{1}{x}} = e^{(1+\frac{1}{x})\ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que f est continue en 0.
(b) Étudier la dérivabilité de f en 0.
2. (a) Montrer que, pour tout réel x strictement positif : $\ln(x) \leq x + 1$.
(b) Calculer $f'(x)$ pour $x > 0$ et déterminer son signe. Préciser le sens de variation de f .
3. (a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
(b) Déterminer un équivalent de $f(x) - x$ en $+\infty$.
4. Tracer l'allure du graphe de f .