

Table des matières

1	Structure d'espace vectoriel	2
1.1	Définitions	2
1.2	Espaces vectoriels de référence	3
1.2.1	L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$	3
1.2.2	L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$	3
1.2.3	L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	4
1.2.4	L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$	4
2	Sous-espaces vectoriels	6
2.1	Définition et caractérisation	6
2.2	Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel (méthode 1)	6
2.3	Sous-espace vectoriel engendré par une famille (méthode 2)	7
2.4	Méthode pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel	9
3	Familles génératrices, familles libres	9
3.1	Familles génératrices d'un espace vectoriel	9
3.2	Familles libres d'un espace vectoriel	11
3.2.1	Notion de famille libre	11
3.3	Notion de colinéarité	12
3.4	Intérêt des familles libres	13
4	Bases d'un espace vectoriel	13
4.1	Définition	13
4.2	Notion de base canonique	14
5	Espace vectoriel de dimension finie	16
5.1	Notion de dimension finie	16
5.2	Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice	16
5.3	Dimension d'un sous-espace vectoriel	17
6	Notion de rang	18
6.1	Notion de rang d'une famille de vecteurs	18
6.1.1	Définitions et propriétés	18
6.1.2	Détermination pratique du rang	18
6.2	Notion de rang d'une matrice	20
6.2.1	Définitions et propriétés	20
6.2.2	Détermination pratique du rang	21
6.2.3	Intérêt du calcul du rang	21

1 Structure d'espace vectoriel

1.1 Définitions

Définition 1 (Hors-programme). Soit E un ensemble non vide. On dit que E est un *espace vectoriel* (sur $\mathbb{R}$) si :

1. E est muni d'une loi de composition interne notée $+$: $E \times E \rightarrow E$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (a) Commutativité :

$$\forall (u, v) \in E^2, u + v = v + u$$

- (b) Associativité :

$$\forall (u, v, w) \in E^3, u + (v + w) = (u + v) + w$$

- (c) Existence d'un élément neutre :

$$\exists 0_E \in E, \forall u \in E, u + 0_E = 0_E + u = u$$

- (d) Existence d'un opposé :

$$\forall u \in E, \exists v \in E, u + v = v + u = 0_E$$

2. E est muni d'une loi de composition externe notée $\cdot$: $\mathbb{R} \times E \rightarrow E$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (a) La loi $\cdot$ est distributive à gauche par rapport à la loi $+$ de E :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (u, v) \in E^2, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$$

- (b) La loi $\cdot$ est distributive à droite par rapport à la loi $+$ de $\mathbb{R}$:

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E, (\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$$

- (c) Associativité mixte :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall u \in E, (\lambda \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$$

- (d) $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$

Définition 2. Soit E un espace vectoriel.

- Les éléments de E sont appelés des vecteurs.
- Les nombres réels servant à la multiplication externe sont appelés des scalaires.

Remarque 1. L'ensemble E est non vide. On l'a exigé en début de définition. Cela apparaît aussi dans les propriétés de $+$ puisqu'il existe dans E un élément particulier noté 0_E . Deux cas se présentent :

- $E = \{0_E\}$ (on dit alors que E est réduit au vecteur nul) et dans ce cas, E ne contient qu'un seul élément et est donc un ensemble fini.
- $E \neq \{0_E\}$ (on dit alors que E n'est pas réduit au vecteur nul) et dans ce cas, E contient un nombre infini d'éléments. En effet, comme $E \neq \{0_E\}$, il existe un élément $u \in E$ tel que $u \neq 0_E$. La loi $\cdot$ étant externe, on a alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \cdot u \in E$. On vient ainsi de créer autant d'éléments dans E qu'il y en a dans $\mathbb{R}$.

Remarque 2. L'ordre dans la multiplication externe est important : si x est un vecteur et si λ est un scalaire, on n'écrira jamais $x \cdot \lambda$.

Remarque 3. La définition d'ev ne fait pas apparaître de loi permettant la multiplication de vecteurs. On ne peut donc pas, a priori, multiplier deux vecteurs entre eux.

Par exemple, l'écriture $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix}$ n'a aucun sens.

Proposition 1 (Propriétés générales). Soit E un espace vectoriel. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $x \in E$.

- L'élément neutre 0_E de E est unique.
- L'élément x admet un unique opposé par la loi $+$. On le note $-x$.
- $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
- $0 \cdot x = 0_E$
- $\lambda \cdot (-x) = (-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x)$
- $\lambda \cdot x = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ OU } x = 0_E$

Definition 3. Soit E un espace vectoriel. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille de vecteurs de E .

- Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$, $\sum_{k=1}^m \lambda_k u_k = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \dots + \lambda_m \cdot u_m \in E$.
- Soit $v \in E$. On dit que v est une combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_m$ si il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$v = \sum_{k=1}^m \lambda_k u_k$$

1.2 Espaces vectoriels de référence

1.2.1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Loi de composition interne $+$:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

Loi de composition externe $\cdot$:

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Exercice 1 : Calculer les vecteurs suivants.

- | | |
|---|--|
| 1. $(1, 3) + (-2, 5) =$ | 5. $(-1, 0, 1) + (0, 3, -3) =$ |
| 2. $3 \cdot (-2, 5) =$ | 6. $4 \cdot (-2, 3, 1) =$ |
| 3. $2 \cdot (1, 2) - (-2, 7) =$ | 7. $(-3) \cdot (-4, 5, 1) + 2 \cdot (1, 2, 0) =$ |
| 4. $x \cdot (-1, 1) + y \cdot (3, 4) =$ | 8. $x \cdot (-2, 0, 2) + y \cdot (3, 1, 0) =$ |

1.2.2 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Loi de composition interne $+$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Loi de composition externe $\cdot$:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Calculer les vecteurs suivants.

- | | |
|---|---|
| 1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$ | 2. $4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$ |
|---|---|

$$3. (-2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$6. (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$4. x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$7. 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

$$8. x \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} =$$

1.2.3 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Loi de composition interne $+$:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,p} + b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + b_{n,1} & \cdots & a_{n,p} + b_{n,p} \end{pmatrix}$$

Loi de composition externe $\cdot$:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Remarque 4. On peut multiplier deux matrices entre elles, mais cette loi n'a rien à voir avec la structure d'espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 : Calculer les vecteurs suivants.

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$6. 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & 7 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$2. 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$7. \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 & -8 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$3. (-2) \cdot \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$4. x \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$8. x \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 7 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

1.2.4 L'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Loi de composition interne $+$:

$$\sum_{k=0}^n a_k X^k + \sum_{k=0}^n b_k X^k = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k$$

Loi de composition externe $\cdot$:

$$\lambda \cdot \sum_{k=0}^n a_k X^k = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$$

Exercice 4 : Calculer les vecteurs suivants.

1. $(X + 2) + (X + 3) =$

2. $3 \cdot (-X + 4) =$

3. $2 \cdot (X + 1) - (2X + 10) =$

4. $a \cdot (-2X + 3) + b \cdot (X - 5) =$

5. $(X^2 + 2X + 1) + (3X^2 - X - 1) =$

6. $3 \cdot (2X^2 - 3X + 4) =$

7. $2 \cdot (-X^2 - 2X + 2) - (X^2 - 4X + 5) =$

8. $a \cdot (3X^2 - X + 2) + b \cdot (X - 4) =$

9. $(-X^3 + X^2 - X + 1) + (X^3 + X^2 + X + 1) =$

10. $(-1) \cdot (-2X^3 + 3X^2 - X + 1) =$

11. $(-3) \cdot (X^3 + 1) + 2 \cdot (X^2 + 3X + 4) =$

12. $a \cdot (4X^3 + 2X + 3) + b \cdot (-2X^3 - X^2 + 3) =$

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisation

Définition 4. Soit E un espace vectoriel. Soit F une partie non vide de E . On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de E si :

- F est stable pour la loi de composition interne $+$:

$$\forall (u, v) \in F^2, u + v \in F$$

- F est stable pour la loi de composition externe $\cdot$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F$$

Proposition 2. Soit E un espace vectoriel.

$$F \text{ est un sev de } E \implies 0_E \in F$$

Par contraposée,

$$0_E \notin F \implies F \text{ n'est pas un sev de } E$$

Exemple 1.

- Si E est un ev, $\{0_E\}$ et E sont des sev de E .
- L'ensemble $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$, mais l'ensemble des polynômes de degré 2 n'est pas un sev de $\mathbb{R}_3[X]$ (il ne contient pas $0_{\mathbb{R}_3[X]}$ par exemple).

Proposition 3 (Caractérisation des sev de E). Soit E un espace vectoriel et F une partie non vide de E . F est un sev de E si et seulement si F est stable par combinaison linéaire.

$$F \text{ est un sev de } E \iff \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda u + \mu v \in F$$

2.2 Démontrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel (méthode 1)

Proposition 4. Soit E un espace vectoriel. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors F est un espace vectoriel.

Méthode (pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel). Pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel, on trouve un espace vectoriel E de référence tel que F est un sev de E . En pratique, cela donne trois choses à démontrer :

1. $F \subset E$.
2. $F \neq \emptyset$: on montre généralement que $0_E \in F$.
3. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in F^2, \lambda u + \mu v \in F$.

Cette méthode est à privilégier lorsque on n'est pas capable de *calculer* F explicitement (définition de F abstraite).

Exercice 5 : Démontrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels.

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = M\}$ (espace des matrices carrées symétriques d'ordre n)
2. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid {}^t M = -M\}$ (espace des matrices carrées antisymétriques d'ordre n) (EDHEC 2020)
3. $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ où $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (commutant de A)
4. $F = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid MX = 0\}$, où $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$
5. $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = 2P(1)\}$
6. $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n\}$
7. $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) - 2f(x) = 0\}$
8. $F = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) \, dt = 0\right\}$
9. $F = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0\right\}$

2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille (méthode 2)

Definition 5. Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathcal{F} = (a_1, \dots, a_m)$ une famille de vecteurs de E . On appelle *sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$* et on note $\text{Vect}(\mathcal{F})$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{F}$:

$$\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}((a_1, \dots, a_m)) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \in E \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

On notera $\text{Vect}(a_1, \dots, a_m)$ à la place de $\text{Vect}((a_1, \dots, a_m))$ pour abréger.

Remarque 5. Il ne faut pas confondre les types d'objets :

- $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs de E
- $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un ensemble, plus précisément une partie de E

Exemple 2.

- Si $\mathcal{F} = (0_E)$, on a $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \{0_E\}$.
- Si $\mathcal{F} = (a)$ avec $a \neq 0$ alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(a) = \{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.
- Si $\mathcal{F} = (a, b)$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \text{Vect}(a, b) = \{\lambda a + \beta b \mid (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2\}$.
-

$$\begin{aligned} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \text{Vect}(1, X, X^2) &= \{\alpha + \beta X + \gamma X^2 \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\} \\ &= \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\} \\ &= \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \{\text{matrices diagonales de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{\text{matrices scalaires de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} \\ &= \{\text{multiples de l'identité de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})\} \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned}
\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) &= \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \mathcal{S}_2(\mathbb{R})
\end{aligned}$$

Théoreme 5. Soient E un espace vectoriel et A une famille de vecteurs de E .

1. $0_E \in \text{Vect}(A)$.
2. Tous les vecteurs de la famille A appartiennent à $\text{Vect}(A)$.
3. $\text{Vect}(A)$ est un espace vectoriel. C'est même le plus petit sev de E contenant les vecteurs de la famille A : si F est un sev de E contenant les vecteurs de la famille A , alors $\text{Vect}(A) \subset F$.
4. Si A est une sous-famille de B alors $\text{Vect}(A) \subseteq \text{Vect}(B)$.

Méthode. Afin de montrer que F est un ev, il suffit de l'écrire sous la forme $\text{Vect}(A)$ où A est une famille de vecteurs.

Détaillons la méthode de calcul sur deux exemples :

1. Cas où F est donné via une équation :

$$\begin{aligned}
F &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z = 3x + 2y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3x + 2y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

2. Cas où F est donné sous forme paramétrique :

$$\begin{aligned}
F &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} b & a & b+c \\ a & b & a \\ b+c & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\
&= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

Théoreme 6. Soit E un espace vectoriel et soit $(a, b, c) \in E^3$. On ne modifie pas l'espace vectoriel engendré par une famille :

- en ajoutant ou en enlevant 0_E à cette famille. Par exemple,

$$\text{Vect}(a, 0_E) = \text{Vect}(a)$$

- en modifiant l'ordre des termes de la famille. Par exemple,

$$\text{Vect}(a, b) = \text{Vect}(b, a)$$

- par multiplication par un scalaire non nul d'un élément de cette famille. Par exemple,

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^*, \text{Vect}(\lambda a, b) = \text{Vect}(a, b)$$

- en ajoutant ou en enlevant à cette famille un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette famille. Par exemple,

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \text{Vect}(a, b, \lambda a + \mu b) = \text{Vect}(a, b)$$

- en ajoutant ou en enlevant à un vecteur de cette famille une CL des autres vecteurs de cette famille. Par exemple,

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \text{Vect}(a, b, c + \lambda a + \mu b) = \text{Vect}(a, b, c)$$

Exemple 3. Calculons l'espace vectoriel engendré par la famille

$$A = (1 + X, X, X - X^2, 1 + 2X + X^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Vect}(A) &= \text{Vect}(1 + X, X, X - X^2, 1 + 2X + X^2) \\ &= \text{Vect}(1, X, X - X^2, 1 + 2X + X^2) \\ &= \text{Vect}(1, X, -X^2, 1 + 2X + X^2) \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2, 1 + 2X + X^2) \\ &= \text{Vect}(1, X, X^2) \\ &= \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

2.4 Méthode pour montrer qu'un ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel

Méthode. Pour prouver que $F \subset E$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E , on peut

- soit montrer que $0_E \notin F$
- soit exhiber deux vecteurs u et v de F dont la somme $u + v$ n'est pas dans F
- soit exhiber un vecteur u de F et un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que λu n'est pas dans F

Exercice 6 : Pour chaque ensemble ci-dessous, déterminer s'il s'agit ou non d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. $F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
2. $F_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3 = 0\}$.
3. $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$.
4. $F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y \text{ et } y = 5z\}$.
5. $F_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\}$.
6. $F_6 = \{(2x + y, y - 2, 1 + x - y) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
7. $F_7 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x = y + z - t\}$.
8. $F_8 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 0\}$.

Exercice 7 : Soit $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = M\}$. F est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

3 Familles génératrices, familles libres

3.1 Familles génératrices d'un espace vectoriel

Définition 6. Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E . On dit que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est *génératrice* de E si

$$E = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

On dit aussi que la famille $(u_1, \dots, u_p)$ *engendre* E .

Proposition 7. Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de vecteurs de E .

$$\begin{aligned} E &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_p) \\ \iff \text{Tout vecteur de } E \text{ peut s'écrire comme combinaison linéaire de vecteurs de la famille } (u_1, \dots, u_p) \\ \iff \forall u \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, u &= \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k \end{aligned}$$

Exemple 4. La famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Démonstration avec la notation $\text{Vect}()$.

$$\begin{aligned} \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Démonstration avec les coordonnées. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \iff \begin{cases} 2a & = x \\ 2a + b + c & = y \\ 2a - b + c & = z \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2a & = x \\ b + c & = y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -b + c & = z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2a & = x \\ b + c & = y - x \\ 2c & = y + z - 2x & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 2a & = x \\ 2b & = y - z & L_2 \leftarrow 2L_2 - L_3 \\ 2c & = y + z - 2x \end{cases} \\ \iff \begin{cases} a & = \frac{1}{2}x \\ b & = \frac{y-z}{2} \\ c & = \frac{y+z}{2} - x \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{y-z}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{y+z}{2} - x\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On remarque au passage qu'à x, y, z fixés, le système précédent admet une unique solution. On en reparlera au moment d'introduire la notion de base.

Exemple 5. La famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$ n'est pas une famille génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Théoreme 8. Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille génératrice de E . Soit $v \in E$.

- La famille $(u_1, \dots, u_p, v)$ est également génératrice de E .
- Plus généralement, toute sur-famille d'une famille génératrice de E (i.e. toute famille contenant une famille génératrice de E) est une famille génératrice de E .

3.2 Familles libres d'un espace vectoriel

3.2.1 Notion de famille libre

Definition 7. Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille de vecteurs de E .

1. On dit qu'il existe une *relation de dépendance linéaire non triviale* entre les vecteurs $u_1, \dots, u_m$ si il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ non tous nuls (attention, à ne pas confondre avec « tous non nuls ») tels que

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k u_k = 0_E$$

2. On dit que la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est *liée* si il existe une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs $u_1, \dots, u_m$.
3. Dans le cas contraire, on dit que la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est *libre*. Autrement dit, $(u_1, \dots, u_m)$ est libre si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \right)$$

Dans ce cas, on dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_m$ sont *linéairement indépendants*.

Remarque 6. Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

Théoreme 9. Soit E un espace vectoriel et soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille de vecteurs de E , avec $m \geq 2$. La famille $(u_1, \dots, u_m)$ est liée si et seulement si l'un des vecteurs de la famille s'exprime comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Méthode (pour montrer qu'une famille $(u_1, \dots, u_m)$ est libre).

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$.

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \iff \text{système linéaire associé, d'inconnues } \lambda_1, \dots, \lambda_m$$

$$\iff \dots$$

$$\iff \text{système échelonné}$$

$$\iff \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \quad (\text{par remontées successives})$$

Donc la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est libre.

Méthode (pour déterminer si une famille $(u_1, \dots, u_m)$ est libre ou liée).

- On commence par essayer de deviner « à vue » une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs u_i
- Si on n'en trouve pas, on procède de la manière suivante :
Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 &\iff \text{ système linéaire associé, d'inconnues } \lambda_1, \dots, \lambda_m \\ &\iff \dots \\ &\iff \text{ système échelonné} \end{aligned}$$

Deux cas se présentent :

1. Ce système est de Cramer (il existe une unique solution) et donc $\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i = 0 \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$.
On peut conclure que la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est libre.
2. Ce système n'est pas de Cramer (il existe une infinité de solutions) et donc il existe au moins une solution qui n'est pas la solution nulle. On peut conclure que la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est liée.
On peut de plus exprimer tous les λ_i en fonction d'une ou de plusieurs variables auxiliaires. En choisissant la valeur 1 pour ces variables auxiliaires, cela permet de trouver une solution $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ explicite qui donne une relation de dépendance linéaire non triviale entre les vecteurs u_i . C'est utile si l'on veut exprimer l'un des vecteurs u_i en fonction des autres.

Exemple 6. Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est libre.

Exemple 7. Montrons que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est liée.

Exemple 8. Montrons que la famille $(1, -3 + X, 1 - X^2)$ est libre dans $\mathbb{R}_2[X]$. On s'aperçoit que la résolution du système est très simple dans ce dernier exemple. C'est le cas car la famille de polynôme est **échelonnée en degré** ce qui signifie que les polynômes (P_1, P_2, P_3) de la famille vérifient :

$$\deg(P_1) < \deg(P_2) < \deg(P_3)$$

C'est un cas classique qu'il est utile de connaître.

Théorème 10. Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E , avec $p \geq 2$.

1. La famille $(u_1, \dots, u_{p-1})$ est également libre.
2. Plus généralement, toute sous-famille d'une famille libre (i.e. toute famille contenue dans une famille libre) est une famille libre.

3.3 Notion de colinéarité

Définition 8. Soit E un espace vectoriel et soient u et v deux vecteurs de E . On dit que les vecteurs u et v sont **colinéaires** si

$$(\exists \alpha \in \mathbb{R}, u = \alpha v) \quad \text{OU} \quad (\exists \beta \in \mathbb{R}, v = \beta u)$$

Autrement dit, u et v sont colinéaires si l'un est multiple de l'autre.

Remarque 7. Attention, on ne parlera JAMAIS de colinéarité pour des familles de trois vecteurs ou plus.

Proposition 11. Soit E un espace vectoriel.

- Une famille (u) constituée d'un seul vecteur de E est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
- Une famille (u, v) constituée de deux vecteurs de E est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

Remarque 8. Dans les énoncés de concours, les familles possèdent le plus souvent 1, 2 ou 3 vecteurs. La proposition précédente permet de gérer rapidement les deux premiers cas.

Exercice 8 : Les familles $\mathcal{F}_k$ suivantes sont-elles libres ?

- | | | |
|--|--|---|
| 1. $\mathcal{F}_1 = ((1, 2), (1, -1))$ | 3. $\mathcal{F}_3 = ((0, 0))$ | 5. $\mathcal{F}_5 = ((2, 3), (-4, -6))$ |
| 2. $\mathcal{F}_2 = ((1, 4))$ | 4. $\mathcal{F}_4 = ((1, -2), (2, 3), (1, 0))$ | 6. $\mathcal{F}_6 = ((3, -1), (-1, 4))$ |

3.4 Intéret des familles libres

Théoreme 12. Soit E un espace vectoriel. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille libre de vecteurs de E . Si un vecteur v s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$, alors cette combinaison linéaire est unique. Autrement dit,

$$\forall v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p), \exists! (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p, v = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k$$

4 Bases d'un espace vectoriel

4.1 Définition

Définition 9. Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E . On dit que $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E si $(e_1, \dots, e_p)$ est libre et génératrice de E .

Théoreme 13. Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E . La famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E si et seulement si pour tout vecteur $v \in E$, il existe un unique p -uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$v = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k$$

Autrement dit, la famille $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique sous forme de combinaison linéaire des éléments de la famille $(e_1, \dots, e_p)$.

Exercice 9 : Montrer que $(1, 2X + 1, X^2 - 3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10 : Trouver une base de l'ensemble $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid 3x + 2y - z = 0 \right\}$.

Définition 10. Soit E un espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Soit v un vecteur de E . Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $v = \sum_{k=1}^p \lambda_k e_k$.

- $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont appelés les *coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}$* .
- le réel λ_k est appelé la $k^{\text{ème}}$ *coordonnée de v dans la base $\mathcal{B}$* .

Remarque 9. L'ordre des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ est importante. Si l'on note $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ les coordonnées d'un vecteur v dans la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$, alors les coordonnées de v dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$ deviennent $(\lambda_2, \lambda_1, \lambda_3)$.

Exercice 11 : Montrer que $((1, 1), (2, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Quels sont les coordonnées du vecteur $(3, 4)$ dans cette base ?

4.2 Notion de base canonique

Il faut bien comprendre que chaque espace vectoriel non réduit au vecteur nul possède une infinité de bases différentes. On peut toutes les utiliser pour faire des calculs mais certaines sont plus pratiques que d'autres. Chaque espace vectoriel usuel possède une base dite *canonique*, qui est considérée comme étant la plus « naturelle ».

Base canonique de $\mathbb{R}^n$. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille $(e_1, \dots, e_n)$ définie par

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \quad e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Décomposons x dans la base canonique :

$$\begin{aligned} x &= (x_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, x_n) \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\ &= \sum_{k=1}^n x_k e_k \end{aligned}$$

Les coordonnées de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sont $(x_1, \dots, x_n)$.

Base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est la famille $(e_1, \dots, e_n)$ définie par

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Décomposons x dans la base canonique :

$$\begin{aligned} x &= \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \\ &= \sum_{k=1}^n x_k e_k \end{aligned}$$

Les coordonnées de $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont $(x_1, \dots, x_n)$.

Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ définie par

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

où le 1 est à la ligne i et à la colonne j . Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Décomposons M dans la base canonique :

$$M = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} m_{i,j} E_{i,j}$$

donc $(m_{1,1}, m_{1,2}, \dots, m_{1,p}, m_{2,1}, \dots, m_{2,p}, \dots, m_{n,1}, \dots, m_{n,p})$ sont les coordonnées de la matrice M dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 9. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Sa base canonique est :

$$\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_c$ sont $(3, 1, 7, 5)$.

Exemple 10. On considère l'espace vectoriel $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Sa base canonique est :

$$\mathcal{B}_c = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & -2 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}_c$ sont $(3, 1, -1, 7, 5, -2, 4, -7, 6)$.

Base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est la famille $(1, X, \dots, X^n)$.

Soit $P(X) = a_0 1 + a_1 X + \dots + a_n X^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Le polynôme $P(X)$ est déjà décomposé dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont $(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

Exercice 12 : Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(X) = (X - 2)^3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

5 Espace vectoriel de dimension finie

5.1 Notion de dimension finie

Définition 11. Soit Z un ensemble non vide.

- Si une famille d'éléments de Z possède un nombre fini d'éléments, on appelle *cardinal* le nombre de ses éléments.
- On dit qu'une famille d'éléments de Z est *de cardinal fini* si elle possède un nombre fini d'éléments.

Exemple 11.

- Si $\mathcal{F} = ((0, 1, 4))$, alors $\text{Card}(\mathcal{F}) = 1$
- Si $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$, alors $\text{Card}(\mathcal{F}) = 2$
- Si $\mathcal{F} = (1, 2X, X^2 - 3X + 4)$, alors $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3$

Définition 12. Soit E un espace vectoriel. On dit que E est *de dimension finie* si E admet une base de cardinal fini (*i.e.* constituée d'un nombre fini de vecteurs).

Théorème 14. Soit E un espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ admettant une famille génératrice finie. Alors E possède une base de cardinal fini. De plus, toutes les bases de E sont finies et de même cardinal. Ce cardinal commun est appelé dimension de E et est noté $\dim(E)$. Par convention, on note $\dim(\{0_E\}) = 0$.

Remarque 10. Ce théorème signifie que pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, il suffit d'en déterminer une base et de compter ses vecteurs.

Exemple 12. On obtient en particulier la dimension des ev de référence :

- $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$
- $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9$
- $\dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})) = 2$
- $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$

et plus généralement,

- $\dim \mathbb{R}^n = n.$
- $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1.$
- $\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np.$

5.2 Cardinal d'une famille libre, d'une famille génératrice

Théorème 15 (Cardinal d'une famille libre). Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Toute famille libre de cardinal n est une base de E .
2. Toute famille libre possède au plus n vecteurs. Autrement dit, toute famille de q vecteurs avec $q > n$ est liée.

Théorème 16 (Cardinal d'une famille génératrice). Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $q \in \mathbb{N}$.

1. Toute famille génératrice de cardinal n est une base de E .
2. Toute famille génératrice de E possède au moins n vecteurs. Autrement dit, toute famille de q vecteurs avec $q < n$ n'est pas génératrice de E .

On retiendra en particulier l'équivalence suivante.

Théorème 17 (Reformulation). Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E . On a l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} & (u_1, \dots, u_n) \text{ est une base de } E \\ \iff & (u_1, \dots, u_n) \text{ est une famille libre} \\ \iff & (u_1, \dots, u_n) \text{ est une famille génératrice de } E \end{aligned}$$

De plus,

$$\text{Card}(\text{famille libre}) \leq \text{Card}(\text{base de } E) \leq \text{Card}(\text{famille génératrice de } E)$$

Méthode (pour montrer qu'une famille finie $\mathcal{F}$ est une base d'un espace vectoriel E).

Il existe deux « arguments de dimension ».

1. On démontre que

- $\mathcal{F}$ est une famille libre de vecteurs de E
- $\text{Card } \mathcal{F} = \dim E$

2. On démontre que

- $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E
- $\text{Card } \mathcal{F} = \dim E$

Il faut choisir l'un des deux arguments, mais il ne faut pas utiliser les deux en même temps (ce serait redondant).

Remarque 11. En général, il est plus simple de démontrer la liberté que le caractère générateur d'une famille.

Exemple 13. La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- C'est une famille libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &\iff \begin{cases} \lambda_1 & & & = 0 \\ & \lambda_2 & & = 0 \\ \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 & & & = 0 \\ & \lambda_2 & & = 0 \\ & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda_1 & & & = 0 \\ & \lambda_2 & & = 0 \\ & & + & \lambda_3 & = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases} \\ &\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \end{aligned}$$

- De plus $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Exemple 14. La famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- C'est une famille génératrice de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. En effet,

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{F}) &= \text{Vect} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \text{Vect} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

- De plus $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

5.3 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 18. Soit E un ev de dimension finie n . Soit F un sev de E .

- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.
- Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$. (la réciproque est évidente)

Exercice 13 : On considère les ensembles

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-X) = -P(X)\} \quad G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(-X) = P(X)\}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Donner une base de chacun d'eux.
3. Donner leur dimension.

Méthode. Soient E et F deux espaces vectoriels. Pour montrer que $F = E$, on procède de la manière suivante.

1. On montre que $F \subset E$.
2. On montre que $\dim(F) = \dim(E)$.

6 Notion de rang

6.1 Notion de rang d'une famille de vecteurs

6.1.1 Définitions et propriétés

Définition 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$. On appelle *rang* de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $(u_1, \dots, u_p)$. Autrement dit :

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_p))$$

Exemple 15. Soit $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{Vect}(\mathcal{F}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \right)$:

- engendre $\text{Vect}(\mathcal{F})$
- est libre car constituée de deux vecteurs non colinéaires.

C'est donc une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$. D'où $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = 2$.

Théorème 19 (Rang d'une famille libre). Soit E un ev de dimension finie. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

$$\boxed{\text{La famille } (u_1, \dots, u_p) \text{ est libre} \iff \text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p = \text{Card}((u_1, \dots, u_p))}$$

Remarque 12. Ainsi, les seules familles dont on sait déterminer le rang « à vue » sont les familles libres.

Théorème 20 (Inégalités sur le rang). Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$.

1. $\boxed{\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq p = \text{Card}((u_1, \dots, u_p))}$

Cas d'égalité : $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = p$ ssi la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

2. $\boxed{\text{rg}(u_1, \dots, u_p) \leq n = \dim(E)}$

Cas d'égalité : $\text{rg}(u_1, \dots, u_p) = n$ ssi la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E .

6.1.2 Détermination pratique du rang

On a vu précédemment qu'on ne modifiait pas l'espace vectoriel engendré par une famille en :

- ajoutant ou en enlevant 0_E à cette famille.
- modifiant l'ordre des termes de la famille.

- multipliant par un scalaire non nul un élément de cette famille.
- ajoutant ou en enlevant à cette famille un vecteur qui apparaît comme CL d'éléments de cette famille.
- en ajoutant ou en enlevant à un vecteur de cette famille une CL des autres vecteurs de cette famille.

On en déduit que ces opérations laissent le rang inchangé.

Méthode (pour déterminer le rang d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$). Il faut calculer $\text{rg}(u_1, \dots, u_p)$ en utilisant les règles de simplification précédentes jusqu'à ce que la famille obtenue soit libre. Le rang de $(u_1, \dots, u_p)$ est alors le cardinal de la famille libre obtenue.

Exemple 16.

$$\begin{aligned}
 & \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3 \quad \text{car cette famille est libre}
 \end{aligned}$$

Exercice 14 : Déterminer le rang des familles suivantes.

$$1. \mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$4. \mathcal{G}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$7. \mathcal{H}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$2. \mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$5. \mathcal{G}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$3. \mathcal{F}_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$6. \mathcal{G}_3 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$8. \mathcal{H}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
 \text{rg}(\mathcal{H}_2) &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \text{car } \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \text{car } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \text{car } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \text{car } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \text{rg} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) & \text{car cette famille est libre} \\
 &= 4
 \end{aligned}$$

□

6.2 Notion de rang d'une matrice

6.2.1 Définitions et propriétés

Définition 14. Soit $A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle *rang de la matrice A* et on note $\text{rg}(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par ses vecteurs colonnes $C_1, C_2, \dots, C_p$.

$$\boxed{\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p))}$$

Remarque 13. Le rang d'une matrice est par définition le rang d'une famille de vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi, les propriétés de cet opérateur de rang matriciel se déduisent des propriétés vues précédemment.

Théoreme 21. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1. $\boxed{\text{rg}(A) \leq p}$ (famille de p vecteurs)
2. $\boxed{\text{rg}(A) \leq n}$ (les vecteurs C_k sont dans un espace vectoriel de dimension n)

6.2.2 Détermination pratique du rang

Théoreme 22. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Notons $C_1, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de A . Notons $L_1, \dots, L_n$ les vecteurs lignes de A . On a

$$\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}({}^t A)}$$

Ce qui permet de conclure que :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(C_1, \dots, C_p) = \text{rg}(L_1, \dots, L_n)$$

On a vu précédemment que certaines opérations laissent le rang d'une famille de vecteurs inchangé. On peut traduire ces opérations pour le calcul du rang d'une matrice. On ne modifie pas le rang d'une matrice en :

- ajoutant ou en enlevant une colonne (resp. ligne) de 0,
- modifiant l'ordre des colonnes (resp. lignes) de cette matrice,
- multipliant l'une des colonnes (resp. lignes) de cette matrice par un réel $\lambda \neq 0$,
- ajoutant ou en enlevant à cette matrice une colonne (resp. ligne) qui est une CL des autres colonnes (resp. lignes) de cette matrice,
- ajoutant ou en enlevant à l'une des colonnes (resp. lignes) de cette matrice une CL des autres colonnes (resp. lignes) de cette matrice.

Méthode. Pour calculer le rang d'une matrice A , on applique l'algorithme du Pivot de Gauss pour l'échelonner (si elle est carrée, on la rend triangulaire). Le rang de A est alors égal au nombre de lignes non nulles.

Théoreme 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure). Alors $\text{rg}(A) = n$ ssi les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

Exercice 15 : Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$

6.2.3 Intérêt du calcul du rang

Théoreme 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a vu précédemment que $\text{rg}(A) \leq n$. Plus précisément, il y a deux cas possibles :

1. $\boxed{A \text{ est inversible} \iff \text{rg}(A) = n}$
2. $\boxed{A \text{ n'est pas inversible} \iff \text{rg}(A) < n}$

Remarque 14. Cette propriété est très pratique pour démontrer qu'une matrice n'est pas inversible. En effet, il est assez simple de repérer qu'une matrice n'est pas de rang plein. C'est par exemple le cas d'une matrice :

- qui possède une colonne (resp. ligne) de 0,
- qui possède deux colonnes (resp. lignes) égales,
- qui possède deux colonnes (resp. lignes) proportionnelles,
- qui possède une colonne (resp. ligne) qui est une CL des autres colonnes (resp. lignes).

Autrement dit, dès qu'on trouve une relation de dépendance linéaire entre les colonnes (resp. lignes) d'une matrice, celle-ci n'est pas inversible.

Théoreme 25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure). La matrice A est inversible ssi les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls.

Remarque 15. Attention, cela ne fonctionne que pour les matrices triangulaires.