DS1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1

On désigne par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** Calculer $(A-I)(A+I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \left\{ \begin{array}{rl} 2y - 2z &= 0 \\ -4x - 4y + 4z &= 0 \\ -2x &= 0 \end{array} \right.$.

b) Déterminer $E_1(A)$.

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

3. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = -U\}$.

a) Résoudre le système : $(S_{-1}) \left\{ \begin{array}{rl} 2x + 2y - 2z &= 0 \\ -4x - 2y + 4z &= 0 \\ -2x + 2z &= 0 \end{array} \right.$

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On détaillera précisément les étapes de calcul.

b) Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

5. ***a)*** Exhiber une matrice $N \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 2

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x+n)$ et $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$. On admet que $\ln(2) \simeq 0,69$.

Etude de f_1

1. Donner sans démonstration le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1. On ne justifiera pas les limites.

3. ***a.*** Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1.

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leqslant x + 1$.

4. Tracer la courbe représentative de f_1.

Etude d'une suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n. (On ne cherchera pas à calculer α_n)

6. ***a.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n}\right)$$

b. En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.

7. ***a.*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.

b. En déduire la limite de la suite (α_n).

8. ***a.*** Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} h_n\left(\ln(n) + 2\right) = 1$$

On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geqslant 2$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n\left(\ln(n) + 2\right) > 0$.

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.

c. En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

9. ***a.*** Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$.

b. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$.

Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la question 7a.

11. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de α_1 à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```
import numpy as np
a,b = 1,3
while __________________ :
    c = (a + b) / 2
    if _______________________ :
        b = c
    else :
        a = c
print (_____)
```

Valeur approchée de α_1 par méthode de point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leqslant \frac{1}{2}\,|u_n - \alpha_1|$$

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

15. En déduire la limite de la suite (u_n).

16. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

- prenne en argument un réel `eps` strictement positif
- renvoie une liste `[n,u]` où `n` est un entier qui vérifie $|u_{\texttt{n}} - \alpha_1| \leqslant$ `eps` et `u` $= u_{\texttt{n}}$.

```
import numpy as np
def approcheAlpha(eps) :
    n = 0
    u = 1
    while ________________________ :
        n = _________
        u = ____________________
    return [n,u]
```

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall t \in\ ]0,+\infty[,\ \ f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ vers $[2,+\infty[$.

On note $g : [2,+\infty[\ \to [1,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1,+\infty[$.

3. ***a)*** Dresser le tableau de variations de g.

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2,+\infty[$.

c) Soit $y \in [2,+\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in\ ]0,+\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y.

PARTIE B : Étude d'une fonction de deux variables

Partie non proposée dans ce DS.

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2\, u_n} = \frac{1}{n}\, f(n\, u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$.

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n.

```
1  def suite(n):
2      u = 1
3      for k in ______________:
4          u = ____________________
5      return u
```

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$.

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} v_k$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, que l'on ne cherchera pas à déterminer.

11. ***a)*** Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}\, dt$.

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leqslant p < n$, calculer $\sum\limits_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leqslant u_n - u_p \leqslant \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2}\, dt$$

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leqslant u_n \leqslant 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leqslant \ell - u_p \leqslant \frac{1}{p-1}$$

e) En déduire une fonction **Python** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Exercice 4

1. Quelle est la nature des séries $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n+1}$ et $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$?

2. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $S_{\mathtt{n}} = \sum_{k=0}^{\mathtt{n}} \dfrac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre `n` de la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.
Pour tout entier naturel n, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leqslant u_n$.
En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s.

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s.

4. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

5. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

6. ***a)*** Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt$$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\, dt \right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

d) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.