

DS1 barème

Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - I)(A + I)^2$.

- 1 pt : $(A - I)(A + I) = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ ou $(A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & -4 & 8 \\ -8 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

- 1 pt : $(A - I)(A + I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

- 1 pt : $(A - I)(A + I)^2 = A^3 + A^2 - A - I$

- 1 pt : $A(A^2 + A - I) = I$

On enlève un point si un produit AI n'est pas simplifié à la fin.

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -4x - 4y + 4z = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}$

- 1 pt : résolution $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$

b) Déterminer $E_1(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

- 1 pt : $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $E_1(A)$

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre

3. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = -U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_{-1}) \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}.$

- 1 pt : résolution $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

- 1 pt : écriture système

- 1 pt : $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

- 1 pt : $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ donc $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $E_{-1}(A)$

- 1 pt : la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre

4. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

a) Démontrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

On détaillera précisément les étapes de calcul.

- 1 pt : P est inversible

- 2 pts : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

- 1 pt : pour $P^{-1}A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ou pour $AP = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

- 1 pt : pour $P^{-1}AP = T.$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}.$

- 1 pt : initialisation

- 2 pts : hérédité

5. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1 pt : $N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 1 pt : $N^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : récurrence immédiate

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N , à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- 1 pt : D et N commutent car $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$

- 1 pt : formule du binôme correcte

- 1 pt : découpage valable car $n \geq 1$

- 1 pt : $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

- 1 pt : $T^n = D^n + n D^{n-1} N$

- 1 pt : cas $n = 0$

Aucun point si la formule du binôme est fausse.

Exercice 2 (inspiré de ECRICOME 2008)

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x + n)$ et $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$. On admet que $\ln(2) \simeq 0,69$.

Etude de f_1

1. Donner sans démonstration le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1 .

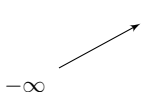
- 1 pt : $\mathcal{D}_{f_1} =]-1, +\infty[$

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1 . On ne justifiera pas les limites.

- 1 pt : La fonction f_1 est dérivable sur $] - 1, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables

- 1 pt : $f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$

- 1 pt :

x	-1	$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		+
Variations de f_1		$+\infty$  $-\infty$

(il faut que les limites soient correctes pour avoir le point)

3. a. Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1 .

- 1 pt : l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1 est $y = x + 1$

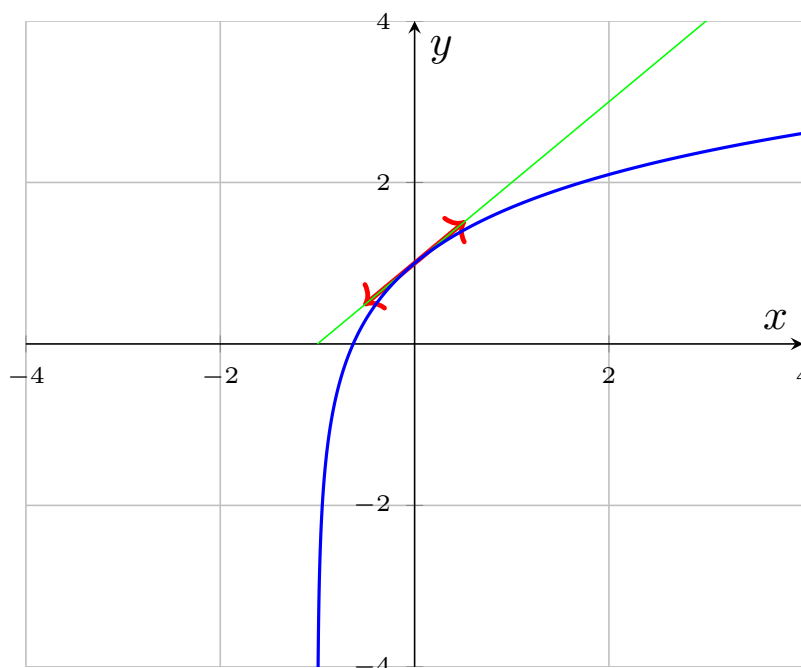
b. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leq x + 1$.

- 1 pt : la fonction f_1 est concave sur $] -1, +\infty[$
- 1 pt : son graphe est en dessous de sa tangente en 0

4. Tracer la courbe représentative de f_1 .

- 1 pt : tracé de la tangente en 0
- 1 pt : tracé cohérent avec $f_1(0) = 1$
- 1 pt : tracé cohérent avec les limites
- 1 pt : tracé cohérent avec la concavité de f_1

Démonstration.

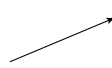


□

Etude d'une suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n .
(On ne cherchera pas à calculer α_n)

- 1 pt : $h'_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} = \frac{x+n-1}{x+n} > 0$
- 1 pt :

x	0	$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$	+	
Variations de h_n	$h_n(0)$  $+\infty$	

- 1 pt : h_n est continue sur $]0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : h_n réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h_n(]0, +\infty[) =]h_n(0), +\infty[$
- 1 pt : $h_n(0) < 0$ donc $0 \in]h_n(0), +\infty[$ (il faut expliquer pourquoi $h_n(0) < 0$ pour avoir le point)

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln \left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n} \right)$$

- 1 pt : penser à utiliser $\alpha_{n+1} = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$
 - 1 pt : fin du calcul correct
- b. En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.
- 1 pt : $\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n} > 1$ donc $h_n(\alpha_{n+1}) > 0 = h_n(\alpha_n)$
 - 1 pt : composition par h_n^{-1} , la bijection réciproque de h_n (de même stricte monotonie, c'est-à-dire strictement croissante)

7. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.

- 1 pt : penser à utiliser $\alpha_n = f_n(\alpha_n) = 1 + \ln(\alpha_n + n)$
 - 1 pt : $\alpha_n > 0$ donc $\ln(\alpha_n + n) > \ln(n)$ par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$
- b. En déduire la limite de la suite (α_n) .

- 1 pt : $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par théorème de comparaison

8. a. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(\ln(n) + 2) = 1$$

On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $h_n(\ln(n) + 2) > 0$.

- 1 pt : $h_n(\ln(n) + 2) = 1 - \ln \left(1 + \frac{\ln(n)+2}{n} \right)$
 - 1 pt : $\frac{\ln(n)+2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées
- b. Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.
- 1 pt : pour $n \geq n_0$, $h_n(\ln(n) + 2) > h_n(\alpha_n)$
 - 1 pt : composition par h_n^{-1} , la bijection réciproque de h_n (de même stricte monotonie, c'est-à-dire strictement croissante)
- c. En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- 1 pt : $1 + \ln(n) < \alpha_n < \ln(n) + 2$ donc $\frac{1}{\ln(n)} + 1 < \frac{\alpha_n}{\ln(n)} < 1 + \frac{2}{\ln(n)}$ (pas de point si l'argument $\ln(n) > 0$ car $n \geq n_0 \geq 2$ n'est pas donné)
 - 1 pt : $\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ (pas de point si le théorème d'encadrement n'est pas cité)

9. a. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$.

- 1 pt : pour tout $n \geq 1$, $\frac{\alpha_n}{n} \geq 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \geq 0$ et $\frac{\alpha_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$
- 1 pt : par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ ont même nature

- 1 pt : $\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
 - 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann d'exposant 1)
 - 1 pt : par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge et donc la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge (pas de point si il manque l'argument : pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \geq 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \geq 0$)
- b. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$.
- 1 pt : $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ ont même nature (même raisonnement que la question précédente)
 - 1 pt : $\frac{\ln(n)}{n^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées donc $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$
 - 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$)
 - 1 pt : par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge et donc la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$ diverge (pas de point si il manque l'argument : pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ et $\frac{\ln(n)}{n^2} \geq 0$)

Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la question 7a.

- 1 pt : $\alpha_1 > 1 + \ln(1) = 1$
- 1 pt : $h_1(3) = 2(1 - \ln(2)) > 0$ car $\ln(2) \simeq 0,69$
- 1 pt : $h_1(3) > h_1(\alpha_1)$ et, en composant par h_1^{-1} qui est strictement croissante, on obtient $3 > \alpha_1$

11. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de α_1 à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1 import numpy as np
2 a,b = 1,3
3 while b-a > 10**(-4) :
4     c = (a + b) / 2
5     if c-1-np.log(c+1) > 0 :
6         b = c
7     else :
8         a = c
9 print(c)
```

- 1 pt : while b-a > 10**(-4):
- 2 pt : if c-1-np.log(c+1) > 0:
- 1 pt : print(c)

Valeur approchée de α_1 par méthode de point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

- **1 pt : initialisation**

- **2 pt : hérédité (1pt pour u_{n+1} est bien défini et 1pt pour $u_{n+1} \geq 1$)**

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

- **1 pt : $|f'_1(x)| = \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$**

- **1 pt : on pose $x = u_n \in [1, +\infty[$ (cf question 12) et $y = \alpha_1 \in [1, +\infty[$ (cf question 10)**

- **1 pt : $|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$ donc $|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$**

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

- **2 pt : initialisation (0 pt si la preuve commence en affirmant $P(0)$)**

- **2 pt : hérédité**

15. En déduire la limite de la suite (u_n) .

- **1 pt : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$**

- **1 pt : $|u_n - \alpha_1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par théorème d'encadrement**

- **1 pt : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha_1$**

16. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

• prenne en argument un réel **eps** strictement positif

• renvoie une liste **[n,u]** où **n** est un entier qui vérifie $|u_n - \alpha_1| \leq \text{eps}$ et **u** = u_n .

```

1 import numpy as np
2 def ApprocheAlpha(eps) :
3     n = 0
4     u = 1
5     while 1/(2**(n-1)) > eps :
6         n = n + 1
7         u = 1 + np.log(u+1)
8     return [n,u]
```

- **1 pt : while 1/(2**(n-1)) > eps :**

- **1 pt : n = n + 1**

- **1 pt : u = 1 + np.log(u+1)**

Exercice 3 (EML 2019)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

- 1 pt : la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$

- 1 pt : $f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2}$

- 1 pt :

t	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(t)$		-	+
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$ 2 $\nearrow$	$+\infty$

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

- 1 pt : la fonction f est continue (car dérivable) sur $[1, +\infty[$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$

- 1 pt : f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[) = [2, +\infty[$

On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

3. a) Dresser le tableau de variations de g .

- 1 pt : D'après le théorème de la bijection, la fonction g est continue sur $[2, +\infty[$ et strictement monotone sur $[2, +\infty[$, de même sens de variation que f sur $[1, +\infty[$

- 1 pt :

t	2	$+\infty$
Variations de g	$\nearrow$ 1	$+\infty$

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.

- 1 pt : f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $f(]1, +\infty[) =]2, +\infty[$

- 1 pt : $\forall t \in]1, +\infty[, f'(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2} > 0$

c) Soit $y \in [2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

- 1 pt : $f(t) = y \iff t^2 - yt + 1 = 0$

- 1 pt : $\Delta = (-y)^2 - 4 \times 1 \times 1 = y^2 - 4 \geq 0$

- 2 pt : pour tout $y \in]2, +\infty[, g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$

- 1 pt : $g(2) = 1$

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

- 1 pt : initialisation

- 3 pt : hérédité (1pt pour u_{n+1} est bien défini et 2pt pour $u_{n+1} \geq 1$)

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n .

```

1  def suite(n):
2      u = 1
3      for k in range(1,n) :
4          u = u + 1/(k**2 * u)
5      return u

```

- 1 pt : for k in range(1,n): (on donne le point si la boucle for a la bonne taille)

- 2 pt : u = u + 1/(k**2 * u) (on donne les points si la formule est cohérente avec le choix de la boucle for)

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

- 1 pt : $v_n = \frac{1}{n^2 u_n}$

- 1 pt : $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$ (0pt si aucun argument)

b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

- 1 pt : pour tout $n \geq 1, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$

- 1 pt : la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann d'exposant $2 > 1$)

- 1 pt : par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

- 1 pt : $\sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - 1$ par télescopage

- 1 pt : $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$ et la série $\sum v_n$ converge donc (u_n) est convergente

11. a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$.

- 1 pt : pour tout $t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{(k-1)^2} \geq \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2}$

- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leq k$)

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$$

- 1 pt : $\sum_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p$ par télescopage

- 1 pt : $0 \leq v_k \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$

- 1 pt : par sommation : $0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$ (0 pt si la relation de Chasles n'est pas citée)

c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

- 1 pt : On applique le résultat de la question précédente avec $p = 2$ (on a bien : $2 \leq p < n$)

- 1 pt : $\int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} = -\left(\frac{1}{n-1} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{n-1}$

- 1 pt : $1 - \frac{1}{n-1} \leq 1$ donc $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$

- 1 pt : $u_2 = 2$ donc $2 \leq u_n \leq 3$. Par passage à la limite : $2 \leq \ell \leq 3$

d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$$

- 1 pt : $\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} = -\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$

- 1 pt : En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement $0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$, on obtient $0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$

e) En déduire une fonction **Python** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

```

1 def valeur_approchee():
2     n = 2
3     while 1 / (n-1) > 10**(-4):
4         n = n + 1
5     return suite(n)

```

- 1 pt : $n = 2$

- 1 pt : `while 1 / (n-1) > 10**(-4):`

- 1 pt : `n = n + 1`

- 1 pt : `return suite(n)`

Exercice 4 (ESCP 2005)

1. Quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$?

- 1 pt : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann décalée d'exposant $\alpha = 1$ donc diverge par critère de Riemann.

- 1 pt : la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ est une série de Riemann décalée d'exposant $\alpha = 2$ donc converge par critère de Riemann.

2. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier n et renvoie $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$.

```

1 def somme(n):
2     S = 0
3     for k in range(n+1):
4         S = S + 1 / (k+1)**2
5     return S

```

- 1 pt : $S = 0$

- 1 pt : `for k in range(n+1):` (on donne le point si la boucle a la bonne taille)

- 1 pt : $S = S + 1 / (k+1)**2$ (on donne le point si c'est cohérent avec le choix de la boucle `for`)

3. On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

- 2 pt : $u_{n+1} - u_n = -a_{2n+1} + a_{2n+2}$

- 1 pt : (a_n) est décroissante donc $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$

- 1 pt : $v_{n+1} - v_n = a_{2n+2} - a_{2n+3}$

- 1 pt : (a_n) est décroissante donc $a_{2n+3} \leq a_{2n+2}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$

b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leq u_n$.

En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s .

- 1 pt : $v_n - u_n = -a_{2n+1} \leq 0$ (car (a_n) est une suite de réels positifs)

- 1 pt : théorème de convergence monotone bien utilisé pour montrer la convergence des suites (u_n) et (v_n)

- 1 pt : $v_n - u_n = -a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc les deux suites admettent la même limite

on donne également les 2 pt si le théorème des suites adjacentes est utilisé au lieu d'utiliser l'inégalité $v_n \leq u_n$

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s .

- 1 pt : Comme $s_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n}) (i.e. tous les termes d'indices pairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux. Idem pour s_{2n+1}

- 1 pt : On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_n) sauf un nombre fini d'entre eux

On donne également les deux points si un thm sur les suites extraites est cité

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

- 1 pt : D'après la question 3.c), la suite (s_n) des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n a_n$ converge, donc la série converge

5. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

- 1 pt : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \frac{1}{n+1}$

- 1 pt : La suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle

- 1 pt : D'après la question 4, la série $\sum (-1)^n a_n$ (autrement dit la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$) est convergente

6. a) Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$

- 1 pt : $\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$ car $-t \neq 1$

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

- 1 pt : linéarité de l'intégrale citée au moins une fois

- 1 pt : $\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$

- 1 pt : $\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(|1+t|)]_0^1 = \ln(|2|) - \ln(|1|) = \ln(2)$

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

- 1 pt : Par inégalité triangulaire, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant :

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| dt$$

- 1 pt : $\left| \frac{t^n}{1+t} \right| = \frac{|t^n|}{|t+1|} = \frac{|t|^n}{|t+1|} = \frac{t^n}{t+1}$ car $t > 0$ et $t+1 > 0$.

- 1 pt : $t > 0$, $1+t > 1$, donc $\frac{1}{t+1} < 1$ et $\frac{t^n}{1+t} < t^n$.

- 1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt < \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

d) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

- 1 pt : $\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = |(-1)^n| \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$

- 1 pt : $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- 1 pt : Tous les objets considérés admettant une limite, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \ln(2)$$