

DS1 correction

Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2016)

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer $(A - I)(A + I)^2$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Ensuite : $A + I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi :

$$(A - I)(A + I) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

- On en déduit : $(A - I)(A + I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$(A - I)(A + I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

□

b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Démonstration.

- D'après la question précédente : $(A - I)(A + I)^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Or :

$$(A - I)(A + I)^2 = (A - I)(A^2 + 2A + I) = A^3 + A^2 - A - I$$

- On en déduit :

$$A^3 + A^2 - A - I = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

donc $A^3 + A^2 - A = I$

et finalement $A(A^2 + A - I) = I$

On en déduit que la matrice A est inversible, d'inverse

$A^{-1} = A^2 + A - I$

□

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_1) \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -4x - 4y + 4z = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}$

Démonstration.

$$(S_1) \quad \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -4x - 4y + 4z = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \begin{cases} y - z = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \begin{cases} x = 0 \\ -x - y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \begin{cases} x = 0 \\ -y + z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

□

b) Déterminer $E_1(A)$.

Démonstration.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$U \in E_1(A) \Leftrightarrow AU = U$$

$$\Leftrightarrow (A - I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & -4 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ -4x - 4y + 4z = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} (d'après la \\ question précédente) \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = 0 \text{ ET } y = z \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

□

- c) En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'ensemble $E_1(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_1(A)$,

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

C'est donc une base de $E_1(A)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel $E_1(A)$.

□

3. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = -U\}$.

a) Résoudre le système suivant : $(S_{-1}) \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x \quad \quad + 2z = 0 \end{cases}$.

Démonstration.

$$(S_{-1}) \quad \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x \quad \quad + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2x - y + 2z = 0 \\ -x \quad \quad + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ \Longleftrightarrow \end{array} \quad \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$$

□

b) Déterminer $E_{-1}(A)$.

Démonstration.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$U \in E_{-1}(A) \Leftrightarrow AU = -U$$

$$\Leftrightarrow (A + I)U = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x \quad \quad + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{(d'après la question précédente)}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
 E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ ET } y = 0 \right\} \\
 &= \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
 &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
 \end{aligned}$$

$$E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

□

- c) En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

L'ensemble $E_{-1}(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- La famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_{-1}(A)$,

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul.

C'est donc une base de $E_{-1}(A)$.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de l'espace vectoriel $E_{-1}(A)$.

□

4. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Démontrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On détaillera précisément les étapes de calcul.

Démonstration.

On applique l'algorithme du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{L_1 \leftrightarrow L_3\}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{L_2 \leftarrow L_2 - L_1\}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{L_3 \leftarrow L_3 + L_2\}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

La réduite obtenue est triangulaire (supérieure) et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Ainsi P est inversible.

On effectue l'opération $\{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3\}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{L_1 \leftarrow L_1 + L_2\}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $\{L_2 \leftarrow -L_2\}$. On obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\text{Finalement : } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Commentaire

On remarque que la matrice P est constituée des vecteurs des famille $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. C'est ce choix qui va permettre d'exprimer par la suite la matrice A sous une forme plus simple. On en reparlera dans le chapitre « Réduction ».

b) Montrer que $P^{-1} A P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Enfin :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = T$$

$$\text{Ainsi : } P^{-1}AP = T.$$

c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n) : A^n = PT^nP^{-1}$.

► Initialisation

- D'une part : $A^0 = I$.
- D'autre part : $PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = P P^{-1} = I$.

D'où $\mathcal{P}(0)$.

► Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $A^{n+1} = PT^{n+1}P^{-1}$).

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n \\ &= PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} && \text{(d'après la question précédente et} \\ & && \text{par hypothèse de récurrence)} \\ &= PT^n (P^{-1} P) TP^{-1} \\ &= PT^n I TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1} \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\text{Ainsi, par principe de récurrence : } \forall n \in \mathbb{N}, A^n = PT^nP^{-1}.$$

5. a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Démonstration.

D'après l'énoncé, $N = T - D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

□

b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- On en déduit, par une récurrence immédiate, que pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

En conclusion : $N^0 = I$, $N^1 = N$ et pour tout $k \geq 2$, $N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Commentaire

- Au lieu de faire une récurrence, on peut aussi écrire, pour tout $k \geq 2$:

$$N^k = N^{k-2} \times N^2 = N^{k-2} \times 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$$

- On insiste sur le fait que cette démonstration n'est valable que si $k \geq 2$ (si ce n'est pas le cas, alors $k - 2 < 0$).

□

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer T^n en fonction des matrices D et N , à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Démonstration.

- Soit $n \geq 1$.

Les matrices D et N commutent. En effet :

$$DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = ND$$

On peut donc appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} T^n &= (D + N)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} D^{n-k} N^k + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \text{(ce découpage est valable car } n \geq 1) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} D^{n-k} N^k && \text{(car on a montré : } \forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}) \\ &= \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N^1 \\ &= D^n + n D^{n-1} N \end{aligned}$$

- Enfin : $D^0 + 0 \cdot D^{-1} N = I$ et $T^0 = I$.
(la matrice D est bien inversible car c'est une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls)
La formule précédente reste donc valable pour $n = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = D^n + n D^{n-1} N$.

Commentaire

- La relation de Chasles stipule que pour tout $(m, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m \leq p \leq n$:

$$\sum_{k=m}^n u_k = \sum_{k=m}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k$$

(la seconde somme est nulle si $p = n$)

où (u_n) est une suite quelconque de réels ou de matrices de même taille.

- Dans cette question, on est dans le cas où $m = 0$ et $p = 1$.
L'argument $n \geq 1$ est donc nécessaire pour découper la somme.
Le cas $n = 0$ doit alors être traité à part.
- Ici, la matrice N vérifie : $\forall k \geq 2, N^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$. Elle est dite nilpotente d'indice 2 (ce terme n'est pas au programme et il est préférable de ne pas l'utiliser dans une copie). Si elle avait été nilpotente d'ordre 3, il aurait fallu traiter à part les cas $n = 0$ mais aussi le cas $n = 1$.
- Cette question sur le binôme de Newton matriciel est extrêmement classique aux concours et il faut donc savoir parfaitement la traiter.

□

Exercice 2 (inspiré de ECRICOME 2008)

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto 1 + \ln(x + n)$ et $h_n : x \mapsto x - f_n(x)$. On admet que $\ln(2) \simeq 0,69$.

Etude de f_1

1. Donner sans démonstration le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1 .

Démonstration. On a $\mathcal{D}_{f_1} =]-1, +\infty[$. □

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f_1 . On ne justifiera pas les limites.

Démonstration. La fonction f_1 est dérivable sur $] -1, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables.

Soit $x > -1$.

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

d'où le tableau de variations :

x	-1	$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$		+
Variations de f_1		$+\infty$  $-\infty$

□

3. a. Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1 .

Démonstration. On a $f_1'(0) = 1$ et $f_1(0) = 1$ donc l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1 est

$$\boxed{y = x + 1}$$

□

- b. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}$, $f_1(x) \leq x + 1$.

Démonstration. La fonction f_1 est deux fois dérivable sur $] -1, +\infty[$. Soit $x > -1$.

$$f_1''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

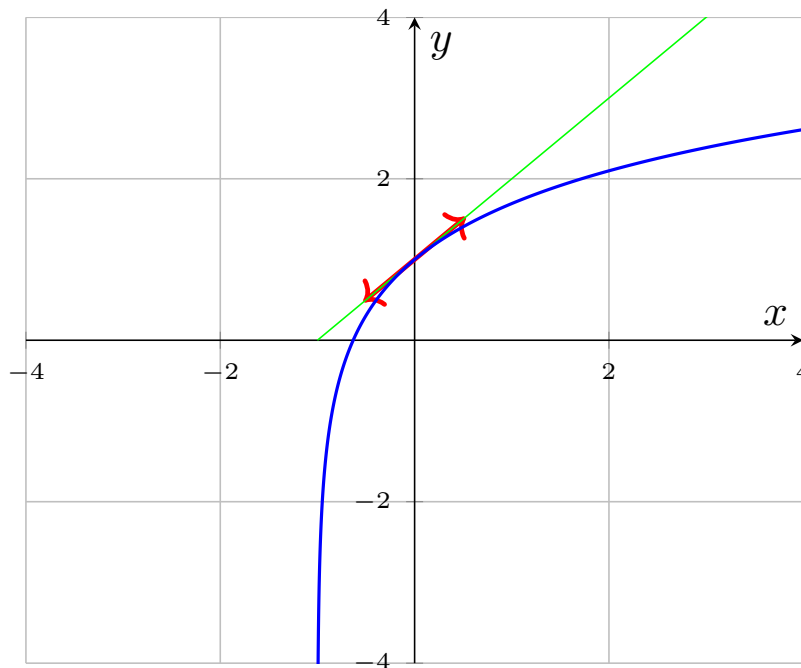
Donc la fonction f_1 est concave sur $] -1, +\infty[$. Ainsi, son graphe est en dessous de sa tangente en 0. Autrement dit, pour tout $x > -1$,

$$f_1(x) \leq x + 1$$

□

4. Tracer la courbe représentative de f_1 .

Démonstration.



□

Etude d'une suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty[$, notée α_n . (On ne cherchera pas à calculer α_n)

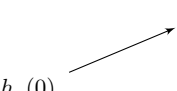
Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x > 0$.

$$f_n(x) = x \iff x - f_n(x) = 0 \iff h_n(x) = 0$$

La fonction h_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Soit $x > 0$.

$$h'_n(x) = 1 - \frac{1}{x+n} = \frac{x+n-1}{x+n} > 0 \quad \text{car } n \geq 1 \text{ et } x > 0$$

d'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
Signe de $h'_n(x)$	+	
Variations de h_n	$h_n(0)$  $+\infty$	

Précisons :

- $h_n(0) = 0 - f_n(0) = -(1 + \ln(n)) < 0$ (car $n \geq 1$).
- $h_n(x) = x - (1 + \ln(x+n)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées.

Ainsi, la fonction h_n est

- continue sur $]0, +\infty[$
- strictement croissante sur $]0, +\infty[$

donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $h_n(]0, +\infty[) =]h_n(0), +\infty[$.

Or, $h_n(0) < 0$ donc $0 \in]h_n(0), +\infty[$.

On en déduit que l'équation $h_n(x) = 0$ (et donc l'équation $f_n(x) = x$) admet une unique solution sur $]0, +\infty[$, que l'on note α_n . $\square$

6. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln \left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n} \right)$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} h_n(\alpha_{n+1}) &= \alpha_{n+1} - f_n(\alpha_{n+1}) \\ &= \alpha_{n+1} - (1 + \ln(\alpha_{n+1} + n)) \\ &= f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - (1 + \ln(\alpha_{n+1} + n)) && \text{par définition de } \alpha_{n+1} \\ &= (1 + \ln(\alpha_{n+1} + n + 1)) - (1 + \ln(\alpha_{n+1} + n)) \\ &= \ln(\alpha_{n+1} + n + 1) - \ln(\alpha_{n+1} + n) \\ &= \ln \left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n} \right) \end{aligned}$$

$\square$

b. En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$h_n(\alpha_{n+1}) = \ln \left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n} \right)$$

Or, $\alpha_{n+1} + n + 1 > \alpha_{n+1} + n > 0$ donc $\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n} > 1$ donc $h_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

On en déduit que

$$h_n(\alpha_{n+1}) > h_n(\alpha_n)$$

Donc, en composant par h_n^{-1} , la bijection réciproque de h_n (de même stricte monotonie, c'est-à-dire strictement croissante), on a

$$\begin{aligned} &h_n^{-1}(h_n(\alpha_{n+1})) > h_n^{-1}(h_n(\alpha_n)) \\ \text{donc} \quad &\boxed{\alpha_{n+1} > \alpha_n} \end{aligned}$$

Donc la suite (α_n) est strictement croissante. $\square$

7. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n > 1 + \ln(n)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition,

$$\alpha_n = f_n(\alpha_n) = 1 + \ln(\alpha_n + n)$$

Or,

$$\begin{aligned} &\alpha_n \in]0, +\infty[\\ \text{donc} \quad &\alpha_n + n > n \\ \text{donc} \quad &\ln(\alpha_n + n) > \ln(n) \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } x \mapsto \ln(x) \text{ sur }]0, +\infty[) \\ \text{donc} \quad &\alpha_n > 1 + \ln(n) \end{aligned}$$

$\square$

b. En déduire la limite de la suite (α_n) .

Démonstration. On a $1 + \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, par théorème de comparaison, $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. □

8. a. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n (\ln(n) + 2) = 1$$

On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $h_n (\ln(n) + 2) > 0$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} h_n (\ln(n) + 2) &= \ln(n) + 2 - f_n(\ln(n) + 2) \\ &= \ln(n) + 2 - (1 + \ln(\ln(n) + 2 + n)) \\ &= 1 + \ln(n) - \ln(\ln(n) + 2 + n) \\ &= 1 + \ln(n) - \ln \left(n \left(1 + \frac{\ln(n) + 2}{n} \right) \right) \\ &= 1 + \ln(n) - \ln(n) - \ln \left(1 + \frac{\ln(n) + 2}{n} \right) \\ &= 1 - \ln \left(1 + \frac{\ln(n) + 2}{n} \right) \end{aligned}$$

Or, $\frac{\ln(n) + 2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, donc $\ln \left(1 + \frac{\ln(n) + 2}{n} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'où $\boxed{h_n (\ln(n) + 2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$. □

b. Montrer que, pour tout $n \geq n_0$, $\alpha_n < \ln(n) + 2$.

Démonstration. Soit $n \geq n_0$. D'après la question 8.a),

$$\begin{aligned} &h_n (\ln(n) + 2) > 0 \\ \text{donc} \quad &h_n (\ln(n) + 2) > h_n (\alpha_n) \\ \text{donc} \quad &h_n^{-1}(h_n (\ln(n) + 2)) > h_n^{-1}(h_n (\alpha_n)) \\ \text{donc} \quad &\boxed{\ln(n) + 2 > \alpha_n} \end{aligned}$$
□

c. En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $n \geq n_0$. D'après les questions 7.a) et 8.b),

$$\text{donc} \quad \begin{aligned} &1 + \ln(n) < \alpha_n < \ln(n) + 2 \\ &\frac{1}{\ln(n)} + 1 < \frac{\alpha_n}{\ln(n)} < 1 + \frac{2}{\ln(n)} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{\ln(n)} + 1} \right\} \ln(n) > 0 \text{ car } n \geq n_0 \geq 2$$

Or, $\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc, par théorème d'encadrement, $\frac{\alpha_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

On en déduit que $\boxed{\alpha_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$. □

Commentaire

Cette question est présentée de manière classique : on vient de démontrer une inégalité sur α_n et on doit en *déduire* un équivalent. Il faut donc penser au théorème d'encadrement et au fait que l'on a déjà démontré une autre inégalité précédemment.

9. a. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$.

Démonstration. On a

- pour tout $n \geq 1$, $\frac{\alpha_n}{n} \geq 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \geq 0$ (cf question 5)
- $\frac{\alpha_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$ (cf question 8.c)

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ ont même nature. Or,

- pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} \geq 0$ et $\frac{\ln(n)}{n} \geq 0$
- $\frac{1}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$
- la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann d'exposant 1)

Donc, par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge et finalement,

la série $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ diverge.

□

b. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$.

Démonstration. Par un raisonnement analogue à la question précédente, on obtient que les séries $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$ et $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ ont même nature. Or,

- pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n^{3/2}} \geq 0$ et $\frac{\ln(n)}{n^2} \geq 0$
- $\frac{\ln(n)}{n^{1/2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées donc $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$
- la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (série de Riemann d'exposant $\frac{3}{2} > 1$)

Donc, par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge et finalement,

la série $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$ converge.

□

Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la question 7a.

Démonstration.

- D'après la question 7a, on a $\alpha_1 > 1 + \ln(1) = 1$.
-

$$\begin{aligned} h_1(3) &= 3 - (1 + \ln(3 + 1)) \\ &= 2 - \ln(4) \\ &= 2 - 2\ln(2) \\ &= 2(1 - \ln(2)) > 0 \end{aligned} \quad \text{car } \ln(2) \simeq 0,69$$

d'où, $h_1(3) > h_1(\alpha_1)$ et, en composant par h_1^{-1} qui est strictement croissante, on obtient $3 > \alpha_1$. □

11. Recopier et compléter le script **Python** suivant afin qu'il renvoie une valeur approchée de α_1 à 10^{-4} près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie.

```

1 import numpy as np
2 a,b = 1,3
3 while _____ :
4     c = (a + b) / 2
5     if _____ :
6         b = c
7     else :
8         a = c
9 print _____

```

Démonstration.

```

1 import numpy as np
2 a,b = 1,3
3 while b-a > 10**(-4) :
4     c = (a + b) / 2
5     if c-1-np.log(c+1) > 0 : # si  $h_1(c) > 0$ 
6         b = c
7     else :
8         a = c
9 print (c)

```

□

Valeur approchée de α_1 par méthode de point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

où $P(n) : \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \geq 1 \end{cases}$

Initialisation :

Par définition, $u_0 = 1$ donc u_0 est bien défini et $u_0 \geq 1$. D'où $P(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n \geq 1$. La fonction f_1 est bien définie sur $] -1, +\infty[$ donc $u_{n+1} = f_1(u_n)$ est bien défini.

De plus, la fonction f_1 est strictement croissante sur $] -1, +\infty[$ donc

$$u_{n+1} = f_1(u_n) \geq f_1(1) = 1 + \ln(2) \geq 1$$

D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \geq 1 \end{cases}$.

□

13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

Démonstration. Soit $x \geq 1$. D'après la question 2,

$$f'_1(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

donc

$$|f'_1(x)| = \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $(x, y) \in [1, +\infty[^2$,

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $x = u_n \in [1, +\infty[$ (cf question 12) et $y = \alpha_1 \in [1, +\infty[$ (cf question 10), on obtient :

$$|f_1(u_n) - f_1(\alpha_1)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

d'où

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1|$$

□

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$

où $P(n) : |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Initialisation :

- D'une part, $u_0 = 1$ et $1 < \alpha_1 < 3$ (cf question 10) donc $|u_0 - \alpha_1| = \alpha_1 - 1 < 2$.
- D'autre part, $\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1} = 2$.

D'où $P(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha_1| &\leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1| && \text{(cf question 13)} \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. □

15. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 14, on a

$$0 \leq |u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Or, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. Donc, par théorème d'encadrement,

$$|u_n - \alpha_1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha_1}$$

□

Commentaire

Cette question est présentée de manière classique : on vient de démontrer une inégalité sur $|u_n - \alpha_1|$ et on doit en *déduire* une limite. Il faut donc penser au théorème d'encadrement.

16. Recopier et compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle

- prenne en argument un réel **eps** strictement positif
- renvoie une liste **[n,u]** où **n** est un entier qui vérifie $|u_n - \alpha_1| \leq \text{eps}$ et **u** = u_n .

```

1 import numpy as np
2 def ApprocheAlpha(eps) :
3     n = 0
4     u = 1
5     while _____ :
6         n = _____
7         u = _____
8     return [n,u]
```

Démonstration.

```

1 import numpy as np
2 def ApprocheAlpha(eps) :
3     n = 0
4     u = 1
5     while 1/(2**(n-1)) > eps :
6         n = n + 1
7         u = 1 + np.log(u+1)
8     return [n,u]

```

□

Exercice 3 (EML 2019)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, f(t) = t + \frac{1}{t}$$

PARTIE A : Étude d'une fonction d'une variable

1. Étudier les variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites en 0 et $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que somme $f_1 + f_2$ avec :
 - $f_1 : t \mapsto t$ dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que fonction polynomiale,
 - $f_2 : t \mapsto \frac{1}{t}$ dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant qu'inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur cet intervalle.
- Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$f'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}$$

De plus :

$$f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{t^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{t^2}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq t^2 \quad \begin{array}{l} \text{(par stricte décroissance de la} \\ \text{fonction } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ sur }]0, +\infty[) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq t \quad \begin{array}{l} \text{(par stricte croissance de la} \\ \text{fonction } t \mapsto \sqrt{t} \text{ sur } [0, +\infty[) \end{array}$$

- On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(t)$		-	+
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$ 2 $\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau :

$$\times f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2.$$

$$\times \text{ comme } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} = +\infty, \text{ alors : } \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty.$$

$$\times \text{ comme } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0, \text{ alors : } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty.$$

□

2. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$.

Démonstration.

D'après la question précédente, la fonction f est :

× continue (car dérivable) sur $[1, +\infty[$,

× strictement croissante sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $f([1, +\infty[)$ avec :

$$f([1, +\infty[) = \left[f(1), \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \right[= [2, +\infty[$$

Finalement, la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.

□

On note $g : [2, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$.

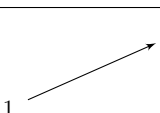
3. a) Dresser le tableau de variations de g .

Démonstration.

D'après le théorème de la bijection, la fonction g est continue sur $[2, +\infty[$ et strictement monotone sur $[2, +\infty[$, de même sens de variation que f sur $[1, +\infty[$.

On obtient alors le tableau de variations suivant :

t	2	$+\infty$
Variations de g	1	$+\infty$



□

b) Justifier que la fonction g est dérivable sur $]2, +\infty[$.

Démonstration.

La fonction f :

× réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]2, +\infty[$,

× est dérivable sur $]1, +\infty[$ (d'après 1.),

× est telle que : $\forall t \in]1, +\infty[, f'(t) \neq 0$. En effet : $\forall t \in]1, +\infty[, f'(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{t^2} > 0$.

On en déduit que g est dérivable sur $]2, +\infty[$.

Commentaire

- On connaît même l'expression de $g' : g' = \frac{1}{f' \circ g}$.
- On peut retrouver cette formule via l'égalité $f \circ g = \text{id}$.
En effet, en dérivant formellement cette égalité, on obtient :

$$(f' \circ g) \times g' = 1$$

□

c) Soit $y \in [2, +\infty[$. En se ramenant à une équation du second degré, résoudre l'équation $f(t) = y$ d'inconnue $t \in]0, +\infty[$. En déduire une expression de $g(y)$ en fonction de y .

Démonstration.

Soit $y \in [2, +\infty[$. Soit $t \in]0, +\infty[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} f(t) = y &\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = y \\ &\Leftrightarrow t^2 + 1 = yt \quad (\text{car } t \neq 0) \\ &\Leftrightarrow t^2 - yt + 1 = 0 \end{aligned}$$

- On note $P \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme défini par : $P(X) = X^2 - yX + 1$.
- Calculons le discriminant du polynôme P :

$$\Delta = (-y)^2 - 4 \times 1 \times 1 = y^2 - 4$$

Comme $y \geq 2$, alors, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $[0, +\infty[: y^2 \geq 4$. Ainsi : $\Delta \geq 0$.

- Distinguons les cas suivant le nombre de racines de P . Deux cas se présentent alors :

× si $\Delta > 0$ (i.e. si $y > 2$), alors P admet exactement deux racines notées r_1 et r_2 :

$$r_1 = \frac{-(-y) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-(-y) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Si $y > 2$, l'équation $f(t) = y$ admet exactement deux solutions :

$$r_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

× si $\Delta = 0$ (i.e. si $y = 2$), alors P admet exactement une racine notée r_0 :

$$r_0 = \frac{-(-y)}{2 \times 1} = \frac{y}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Si $y = 2$, l'équation $f(t) = y$ admet une unique solution : $r_0 = 1$.

Commentaire

Remarquons que, pour $y = 2$, r_1 et r_2 prennent la valeur 1. Les expressions de r_0 , r_1 et r_2 coïncident donc en $y = 2$.

- Comme g est la bijection réciproque de la restriction de f à $[1, +\infty[$, pour tout $y \in [2, +\infty[$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$g(y) = t \Leftrightarrow f(g(y)) = f(t) \Leftrightarrow y = f(t)$$

On en déduit que, pour tout $y \in [2, +\infty[$, $g(y)$ est la solution de l'équation $f(t) = y$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Soit $y \in [2, +\infty[$. Deux cas se présentent donc :

- × si $y \geq 2$, alors on cherche à déterminer quelle solution de r_1 ou de r_2 appartient à $[1, +\infty[$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} r_1 \geq 1 &\Leftrightarrow \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow y - \sqrt{y^2 - 4} \geq 2 \\ &\Leftrightarrow y - 2 \geq \sqrt{y^2 - 4} \\ &\Leftrightarrow (y - 2)^2 \geq y^2 - 4 \quad (\text{par stricte croissance de la fonction } x \mapsto x^2 \text{ sur } [0, +\infty[, \text{ et } y \geq 2) \\ &\Leftrightarrow y^2 - 4y + 4 \geq y^2 - 4 \\ &\Leftrightarrow 8 \geq 4y \Leftrightarrow 2 \geq y \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est fausse (on a supposé $y > 2$), donc, par équivalence : $r_1 < 1$.

- Ensuite : $\sqrt{y^2 - 4} \geq 0$. Donc, comme $y \geq 2$: $y + \sqrt{y^2 - 4} \geq 2$.

$$\text{Ainsi : } r_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \geq 1.$$

On en déduit, pour tout $y \in]2, +\infty[$, $g(y) = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$.

- × si $y = 2$, alors $g(y) = r_0 = 1$.

On en déduit : $g(2) = 1$.

Comme les expressions de r_0 et de r_2 coïncident en 2, on obtient finalement :

$$g : y \mapsto \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}.$$

□

PARTIE C : Étude d'une suite

On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 u_n} = \frac{1}{n} f(n u_n)$$

8. Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

Démonstration.

Démontrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ où $\mathcal{P}(n) : \begin{cases} u_n \text{ existe} \\ u_n \geq 1 \end{cases}$.

► **Initialisation :**

D'après l'énoncé : $u_1 = 1$. Donc : $u_1 \geq 1$.

D'où $\mathcal{P}(1)$.

► **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$ (i.e. $\begin{cases} u_{n+1} \text{ existe} \\ u_{n+1} \geq 1 \end{cases}$)

Par hypothèse de récurrence, le réel u_n existe et $u_n \geq 1$.

- Comme $u_n \geq 1 > 0$ et $n > 0$, alors : $n u_n > 0$.
Or f est définie sur $]0, +\infty[$, donc le réel $f(n u_n)$ existe.
On en déduit que u_{n+1} existe.
- Ensuite :

$$\begin{aligned} & u_n \geq 1 \\ \text{donc} \quad & n u_n \geq n \quad (\text{car } n > 0) \\ \text{d'où} \quad & f(n u_n) \geq f(n) \quad (\text{par croissance de } f \text{ sur } [1, +\infty[, \\ & \text{et } n u_n \geq n \geq 1) \\ \text{ainsi} \quad & \frac{1}{n} f(n u_n) \geq \frac{1}{n} f(n) \quad (\text{car } \frac{1}{n} > 0) \end{aligned}$$

On en déduit : $u_{n+1} \geq \frac{1}{n} f(n)$. Or :

$$\frac{1}{n} f(n) = \frac{1}{n} \left(n + \frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{n^2} \geq 1$$

Ainsi, par transitivité : $u_{n+1} \geq \frac{1}{n} f(n) \geq 1$.

D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

Par principe de récurrence, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n existe et $u_n \geq 1$.

Commentaire

Cette question est un classique des suites récurrentes. Elle se traite presque toujours par récurrence.

□

9. Recopier et compléter les lignes 3 et 4 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie la valeur de u_n .

```

1  def suite(n):
2      u = 1
3      for k in _____:
4          u = _____
5      return u

```

Démonstration.

```

1  def suite(n):
2      u = 1
3      for k in range(1,n):
4          u = u + 1/(k**2 * u)
5      return u

```

Détaillons l'obtention de ce programme.

La variable u est créée pour contenir successivement les valeurs $u_1, \dots, u_n$.

- On initialise donc cette variable à $u_1 = 1$ avec la ligne 2.

```

2      u = 1
```

- On met ensuite à jour u à l'aide d'une structure itérative (boucle for) avec les lignes 3 à 4.

```

3      for k in range(1,n):
4          u = u + 1/(k**2 * u)
```

Commentaire

- On décrit ici de manière précise les instructions afin d'aider le lecteur un peu moins habile en **Python**. Cependant, l'écriture du script démontre la compréhension de toutes les commandes en question et permet sans doute d'obtenir la totalité des points alloués à cette question.

□

10. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.

- a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Tout d'abord :

$$v_n = u_{n+1} - u_n = \cancel{u_n} + \frac{1}{n^2 u_n} - \cancel{u_n} = \frac{1}{n^2 u_n}$$

- D'après la question précédente : $u_n \geq 1 > 0$. Donc : $v_n = \frac{1}{n^2 u_n} \geq 0$.
- Toujours d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} u_n &\geq 1 \\ \text{donc } \frac{1}{u_n} &\leq 1 && (\text{par décroissance de la fonction} \\ &&& \text{inverse sur }]0, +\infty[) \\ \text{d'où } \frac{1}{n^2 u_n} &\leq \frac{1}{n^2} && (\text{car } \frac{1}{n^2} > 0) \\ \text{ainsi } v_n &\leq \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.

□

- b) En déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 1} v_n$.

Démonstration.

D'après la question précédente :

$$\times \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

$\times$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant 2 ($2 > 1$). Elle est donc convergente.

Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente.

Commentaire

La seule difficulté de cette démonstration réside dans la rédaction du critère des séries à termes positifs (les arguments à utiliser ont tous été démontrés dans les questions précédentes). C'est donc une question d'application directe du cours qu'il convient de savoir traiter. □

c) Calculer, pour tout n supérieur ou égal à 2, $\sum_{k=1}^{n-1} v_k$.

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ , que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Démonstration.

- Soit $n \geq 2$. Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k = \sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_{(n-1)+1} - u_1 = u_n - 1$$

$$\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} v_k = u_n - 1$$

- Soit $n \geq 2$. D'après ce qui précède :

$$u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k$$

Or, d'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est convergente.

On déduit de l'écriture précédente de u_n que la suite (u_n) est convergente, de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k$$

Ainsi, la suite (u_n) converge vers un réel noté ℓ . □

11. a) Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on a : $\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$.

Démonstration.

Soit $k \geq 2$.

- Soit $t \in [k-1, k]$.

$$\text{Comme } k-1 \leq t \leq k$$

$$\text{alors } \frac{1}{(k-1)^2} \geq \frac{1}{t^2} \geq \frac{1}{k^2} \quad \begin{array}{l} \text{(par décroissance de la} \\ \text{fonction } t \mapsto \frac{1}{t^2} \text{ sur }]0, +\infty[) \end{array}$$

- La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue sur le segment $[k-1, k]$.

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($k-1 \leq k$) :

$$\int_{k-1}^k \frac{1}{(k-1)^2} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt \geq \int_{k-1}^k \frac{1}{k^2} dt$$

||

||

$$(k - (k-1)) \frac{1}{(k-1)^2}$$

$$(k - (k-1)) \frac{1}{k^2}$$

$$\text{En particulier, pour tout } k \geq 2 : \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt.$$

□

b) Pour tous entiers n et p tels que $2 \leq p < n$, calculer $\sum_{k=p}^{n-1} v_k$ et en déduire :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$$

Démonstration.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que : $2 \leq p < n$.

• Tout d'abord, par sommation télescopique :

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = \sum_{k=p}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_{(n-1)+1} - u_p = u_n - u_p$$

$$\sum_{k=p}^{n-1} v_k = u_n - u_p$$

• Soit $k \geq 2$.

- D'après la question **10.a)** : $0 \leq v_k \leq \frac{1}{k^2}$.

- D'après la question précédente, on obtient par transitivité :

$$0 \leq v_k \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

$$\forall k \geq 2, 0 \leq v_k \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

• On obtient, par sommation :

$$0 \leq \sum_{k=p}^{n-1} v_k \leq \sum_{k=p}^{n-1} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^2} dt$$

||

$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt \quad (\text{par relation de Chasles})$$

Ainsi, d'après ce qui précède, pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2 \leq p < n$:

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt.$$

Commentaire

Les questions **11.a)** et **11.b)** sont en fait une comparaison série-intégrale dont on rappelle le résultat ci-dessous.

- On considère une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, +\infty[$.
- On suppose de plus que f est décroissante sur $[0, +\infty[$. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t) dt \leq f(k-1)$$

On en déduit par sommation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^n f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k-1)$$

- c) En déduire, pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.
Montrer alors que ℓ appartient à l'intervalle $[2, 3]$.

Démonstration.

- Soit $n \geq 3$. On applique le résultat de la question précédente avec $p = 2$ (on a bien : $2 \leq p < n$) :

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$$

Or :

$$\int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^{n-1} = -\left(\frac{1}{n-1} - 1 \right) = 1 - \frac{1}{n-1} \leq 1$$

- On en déduit, par transitivité :

$$0 \leq u_n - u_2 \leq \int_1^{n-1} \frac{1}{t^2} dt \leq 1$$

Ainsi, pour tout $n \geq 3$: $u_2 \leq u_n \leq 1 + u_2$.

- Par définition de la suite (u_n) :

$$u_2 = u_1 + \frac{1}{1^2 u_1} = 1 + \frac{1}{1 \times 1} = 2$$

On en déduit, avec l'encadrement précédent, pour tout $n \geq 3$:

$$2 \leq u_n \leq 3$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on obtient : $\ell \in [2, 3]$.

□

- d) Montrer, pour tout entier p supérieur ou égal à 2 :

$$0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$$

Démonstration.

Soit $p \geq 2$.

- Soit $n > p$. D'après la question 11.b) :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt$$

- Or :

$$\int_{p-1}^{n-1} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_{p-1}^{n-1} = -\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{p-1} \right) = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$$

Ainsi :

$$0 \leq u_n - u_p \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{n-1}$$

En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent, on obtient : $0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$.

□

- e) En déduire une fonction **Python** qui renvoie une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près.

Démonstration.

- On cherche ici à trouver un entier N tel que u_N est une valeur approchée de ℓ à 10^{-4} près. Autrement dit, on souhaite exhiber $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$|\ell - u_N| \leq 10^{-4}$$

- Or, d'après la question précédente : $\forall p \geq 2, \quad 0 \leq \ell - u_p \leq \frac{1}{p-1}$.
- Il suffit alors de trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{N-1} \leq 10^{-4}$.

Si c'est le cas, on obtient alors par transitivité :

$$0 \leq \ell - u_N \leq 10^{-4}$$

- On propose alors le programme suivant :

```
1  def valeur_approchee():
2      n = 2
3      while 1 / (n-1) > 10**(-4):
4          n = n + 1
5      return suite(n)
```

Détaillons les éléments de ce script.

- Début du script

La variable `n` est initialisée à 2. En effet, on souhaite pouvoir effectuer le calcul : $\frac{1}{n-1}$.

```
2      n = 2
```

- Structure itérative

Les lignes 3 à 4 consistent à déterminer le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n-1} \leq 10^{-4}$. On doit donc comparer les valeurs successives de la suite $\left(\frac{1}{n-1}\right)_{n \geq 2}$ au réel 10^{-4} jusqu'à ce que $\frac{1}{n-1} \leq 10^{-4}$. Autrement dit, on doit comparer ces valeurs successives à 10^{-4} tant que $\frac{1}{n-1} > 10^{-4}$. Pour cela on met en place une structure itérative (boucle while) :

```
3      while 1 / (n-1) > 10**(-4):
```

On met alors à jour en conséquence la variable `n` : on ajoute 1 pour signaler qu'on va comparer le terme suivant de la suite $\left(\frac{1}{n-1}\right)_{n \geq 2}$ à 10^{-4} .

```
4          n = n + 1
```

- Fin du script

À la fin de cette boucle, on est assuré que : $\frac{1}{n-1} \leq 10^{-4}$ (on itère tant que ce n'est pas le cas).

Il reste alors à calculer la valeur approchée de ℓ : on l'obtient par le calcul de u_n où n est la valeur obtenue à l'issue de cette boucle, en utilisant la fonction codée à la question 9.

```
5      return suite(n)
```

Commentaire

- Lorsqu'on écrit une boucle **while**, il est préférable de s'assurer en amont de sa terminaison. C'est bien le cas ici. En effet, la suite $\left(\frac{1}{n-1}\right)_{n \geq 2}$ est convergente de limite 0. Ce qui signifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left| \frac{1}{n-1} - 0 \right| < \varepsilon$$

Ainsi, quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie au départ (ici 10^{-4}), on est toujours en mesure de trouver un rang n_0 à partir duquel on aura : $\frac{1}{n-1} < 10^{-4}$.

- On pouvait déterminer, sans utiliser de boucle, un entier N tel que u_N est une valeur approchée à 10^{-4} près de ℓ . Pour ce faire, on remarque :

$$\frac{1}{n-1} \leq 10^{-4} \Leftrightarrow n-1 \geq 10^4 \Leftrightarrow n \geq 10^4 + 1$$

L'entier $N = \lceil 10^4 + 1 \rceil$ convient.

□

Exercice 4 (ESCP 2005)

1. Quelle est la nature des séries $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$?

Démonstration.

- La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ est une série de Riemann décalée d'exposant $\alpha = 1$ donc diverge par critère de Riemann.
- La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$ est une série de Riemann décalée d'exposant $\alpha = 2$ donc converge par critère de Riemann.

□

2. Écrire une fonction **Python** qui prend en paramètre un entier n et renvoie $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$, somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)^2}$.

Démonstration.

```

1 def somme(n):
2     S = 0
3     for k in range(n+1):
4         S = S + 1 / (k+1)**2
5     return S

```

Détaillons les éléments de ce programme.

- **Début du programme**

Conformément à l'énoncé, on commence par préciser la structure de la fonction :

- × cette fonction se nomme **somme**,
- × elle prend en paramètre la variable **n**.

```
1 def somme(n):
```

On initialise ensuite la variable **S** à 0 (choix naturel d'initialisation lorsqu'on souhaite coder une somme puisque 0 est l'élément neutre de l'opérateur de sommation).

```
2     S = 0
```

• **Structure itérative**

Les lignes 3 à 4 consistent à mettre à jour la variable **S** pour qu'elle contienne la quantité $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$. Pour cela, on utilise une structure conditionnelle (boucle for) :

```
3         for k in range(n+1):
4             S = S + 1 / (k+1)**2
```

• **Fin du programme**

À l'issue de cette boucle, la variable **S** contient la quantité $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$. □

Commentaire

Il est aussi possible de proposer une fonction tirant parti des fonctionnalités de la bibliothèque **numpy** de **Python** :

```
1 import numpy as np
2 def sommeTab(n):
3     T = np.arange(n+1)
4     T = 1/(T+1)**2
5     return sum(T)
```

- En ligne 3, on crée un tableau **T** contenant les différentes valeurs prises par la variable de sommation k .

```
3     T = np.arange(n+1)
```

- En ligne 4, on crée un tableau **T** contenant les différentes valeurs prises par les éléments de la somme.

```
4     T = 1/(T+1)**2
```

- Enfin, l'opérateur **sum** permet de sommer tous les éléments du tableau **T** :

```
5     return sum(T)
```

3. On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k, \quad v_n = \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k, \quad s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$$

- a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{2n} \cancel{(-1)^k a_k} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} \right) - \sum_{k=0}^{2n} \cancel{(-1)^k a_k} \\
 &= -a_{2n+1} + a_{2n+2} \quad (\text{car } 2n+1 \text{ impair et } 2n+2 \text{ pair})
 \end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, alors : $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est décroissante.

Commentaire

La suite (u_n) est définie par :

$$\forall m \in \mathbb{N}, u_{\boxed{m}} = \sum_{k=0}^{2\boxed{m}} (-1)^k a_k$$

L'obtention du terme u_{n+1} ne doit pas poser de problème : il suffit de remplacer la « boîte » $\boxed{m}$ par la « boîte » $\boxed{n+1}$. Mathématiquement, on ne parlera pas de « boîte » $\boxed{n+1}$ mais plutôt de l'expression **parenthésée** $(n+1)$. On agira de même si l'on souhaite obtenir u_{n+2} ou u_{2n} ou $u_{2n+1} \dots$

- De même :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=0}^{2(n+1)+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \cancel{(-1)^k a_k} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+3} a_{2n+3} \right) - \sum_{k=0}^{2n+1} \cancel{(-1)^k a_k} \\
 &= a_{2n+2} - a_{2n+3} \quad (\text{car } 2n+2 \text{ pair et } 2n+3 \text{ impair})
 \end{aligned}$$

Comme la suite (a_n) est décroissante, alors : $a_{2n+2} \geq a_{2n+3}$, et donc : $a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} \geq v_n$. La suite (v_n) est croissante.

□

- b) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n \leq u_n$.

En déduire que la suite (u_n) admet une limite s et que la suite (v_n) admet la même limite s .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Tout d'abord :
$$\begin{aligned}
 v_n - u_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k \\
 &= (-1)^{2n+1} a_{2n+1} \\
 &= -a_{2n+1} \leq 0 \quad (\text{car } (a_n) \text{ est une suite de réels positifs})
 \end{aligned}$$

On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n$.

- La suite (v_n) étant décroissante, on démontre par récurrence immédiate :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_0 \leq v_n$$

On en déduit, par transitivité : $\forall n \in \mathbb{N}, v_0 \leq v_n \leq u_n$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par v_0 . Elle converge donc vers une limite ℓ_1 .

- On raisonne de manière similaire pour (v_n) .
La suite (u_n) étant décroissante, on démontre par récurrence immédiate : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_0$.
Puis, par transitivité : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \leq u_0$.

La suite (v_n) est croissante et majorée par u_0 . Elle converge donc vers une limite ℓ_2 .

- Il reste à démontrer : $\ell_1 = \ell_2$. Les suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell_2 - \ell_1$$

Finalement :

$$\begin{array}{ccc} \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) & = & \lim_{n \rightarrow +\infty} -a_{2n+1} \\ \parallel & & \parallel \\ \ell_2 - \ell_1 & & 0 \end{array}$$

Ainsi, on a bien : $\ell_1 = \ell_2$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc convergentes vers la même limite que l'on note s . □

Commentaire

- On a démontré en question précédente que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante. De plus, en début de question, on démontre :

$$v_n - u_n = -a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les suite (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Ainsi, par le théorème des suites adjacentes, on en déduit que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et de même limite s .

- Dans l'énoncé, on demande de démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq u_n \quad \text{et pas} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$$

Il faut donc comprendre que l'on demande ici de démontrer le théorème des suites adjacentes et non pas de l'utiliser directement. On peut penser que le sujet (qui date de 2005) aurait été formulé différemment avec le programme actuel.

Commentaire

Dans l'énoncé, on considère deux suites adjacentes (u_n) et (v_n) .

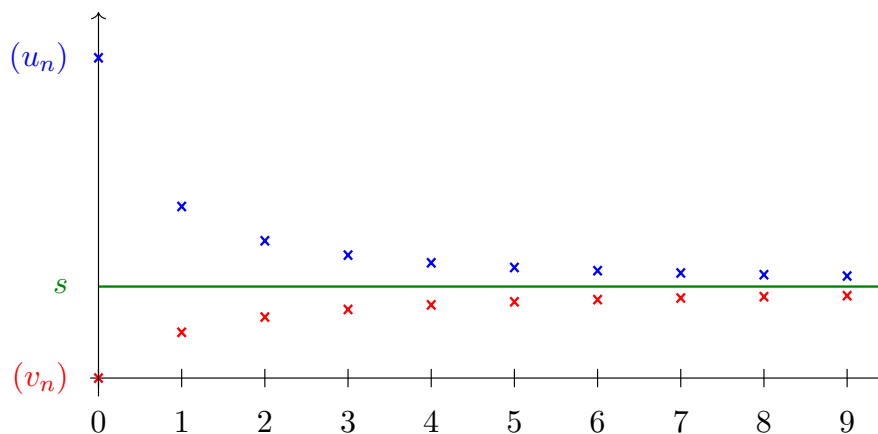
Plus précisément, elles vérifient :

× (u_n) décroissante,

× (v_n) croissante,

× $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Si l'on essaie de tracer la représentation graphique de suites vérifiant de telles contraintes, on va obtenir le résultat suivant :



Un tel schéma fait naturellement apparaître les deux propriétés que l'énoncé demande de démontrer, à savoir :

× la position relative des deux suites (u_n) et (v_n) ,

× l'existence de s , limite commune de (u_n) et (v_n) .

c) En déduire que la suite (s_n) converge vers s .

Démonstration.

On remarque tout d'abord :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = s_{2n} \quad \text{et} \quad v_n = s_{2n+1}$$

Soit I un intervalle ouvert contenant s .

- Comme $s_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n}) (i.e. tous les termes d'indices pairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.
- Comme $s_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_{2n+1}) (i.e. tous les termes d'indices impairs de la suite (s_n)) sauf un nombre fini d'entre eux.

On en déduit que l'intervalle I contient tous les termes de la suite (s_n) sauf un nombre fini d'entre eux.

Ceci signifie que la suite (s_n) est convergente de limite s .

□

Commentaire

- On démontre dans cette question la propriété, parfois appelée « propriété de recouvrement » :

$$\left. \begin{array}{l} s_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s \\ s_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s \end{array} \right\} \Rightarrow s_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$$

Cette propriété n'apparaît pas dans le programme officiel de la voie ECE.
Il faut donc la redémontrer à chaque utilisation.

- La convergence d'une suite (s_n) vers un réel s admet deux définitions équivalentes.

1) Définition sans les ε :

(s_n) converge vers $s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Tout intervalle ouvert contenant s contient tous les termes de la suite (s_n) sauf un nombre fini d'entre eux

C'est la définition donnée par le programme officiel (et celle qu'on a utilisée pour la démonstration).

2) Définition avec les ε :

(s_n) converge vers $s \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |s_n - s| < \varepsilon$

- On peut aussi effectuer la démonstration précédente à l'aide de cette deuxième définition. Détaillons ce point.

Soit $\varepsilon > 0$.

× $s_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$, donc, par définition de la convergence :

il existe un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_1 : |s_{2n} - s| \leq \varepsilon$.

× $s_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} s$, donc, par définition de la convergence :

il existe un rang $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_2 : |s_{2n+1} - s| \leq \varepsilon$.

On choisit alors $n_0 = \max(2n_1, 2n_2 + 1)$.

Alors, pour tout $n \geq n_0 : |s_n - s| \leq \varepsilon$.

4. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n a_n$ est convergente.

Démonstration.

D'après la question 3.c), la suite (s_n) des sommes partielles de la série $\sum (-1)^n a_n$ converge, donc la série converge. $\square$

5. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente. On note $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ sa somme.

Démonstration.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $a_n = \frac{1}{n+1}$.

La suite (a_n) est une suite de réels strictement positifs, décroissante et de limite nulle.

D'après la question 4, la série $\sum (-1)^n a_n$ (autrement dit la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$) est convergente. $\square$

6. a) Établir, pour tout réel t positif et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

Démonstration.

Soient $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $-t$. Comme $-t \neq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1 - (-t)^n}{1 - (-t)} = \frac{1}{1+t} - \frac{(-t)^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

□

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre l'égalité précédente entre 0 et 1.

- D'une part, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

- D'autre part, toujours par linéarité :

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t} \right) dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

De plus :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = [\ln(|1+t|)]_0^1 = \ln(|2|) - \ln(|1|) = \ln(2)$$

$$\text{Finalement : } \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

□

c) Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Démonstration.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$.

- Par inégalité triangulaire, les bornes de l'intégrale étant dans l'ordre croissant :

$$\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{t^n}{1+t} \right| dt$$

- Or : $\left| \frac{t^n}{1+t} \right| = \frac{|t^n|}{|t+1|} = \frac{|t|^n}{|t+1|} = \frac{t^n}{t+1}$ car $t > 0$ et $t+1 > 0$.

- De plus, comme $t > 0$, $1+t > 1$, $\frac{1}{t+1} < 1$ et $\frac{t^n}{1+t} < t^n$.

- Par positivité de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt < \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Par transitivité, on obtient bien : $\left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}.$

□

- d) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}.$

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question **6.c)** :

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = |(-1)^n| \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| = \left| \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Or : $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Par théorème d'encadrement, on en déduit que : $(-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

Tous les objets considérés admettant une limite, on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(2) - \lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt = \ln(2)$$

□