
Planche HEC : séries

Exercice avec préparation 1

Soit $\alpha > 0$ et $\sum u_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{et, si } n \geq 2, \quad v_n = \frac{u_n}{(R_{n-1})^\alpha}$$

1. Question de cours : énoncer le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

2. On supposera dans cette question que $u_n = \frac{1}{2^n}$.

a) Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer R_n .

b) En déduire v_n , puis donner une condition sur α pour que $\sum v_n$ converge.

Désormais, on ne suppose plus que $u_n = \frac{1}{2^n}$ et on traite le cas général.

3. Exprimer v_n en fonction de R_n , R_{n-1} et α .

4. En prenant $\alpha = 1$,

a) Exprimer $\ln(1 - v_n)$ en fonction de $\ln(R_n)$ et de $\ln(R_{n-1})$.

b) En déduire la nature de $\sum v_n$.

5. On suppose : $\alpha > 1$.

a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$: $R_{n-1}^\alpha \leq R_n$.

b) En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

6. On suppose : $0 < \alpha < 1$.

a) Calculer $\int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

b) En déduire la nature de $\sum v_n$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$, et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ converge, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

2. a) La série $\sum u_n$ est une série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc elle converge. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1+k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

Finalement, on trouve : $R_n = u_n$.

b) Soit $n \geq 2$.

$$v_n = \frac{u_n}{u_{n-1}^\alpha} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^\alpha} = \frac{2^{n\alpha-\alpha}}{2^n} = 2^{-\alpha} \left(\frac{2^\alpha}{2}\right)^n = 2^{-\alpha} \left(\frac{1}{2^{1-\alpha}}\right)^n$$

La série $\sum v_n$ est une série géométrique (à constante multiplicative près) de raison $q = \frac{1}{2^{1-\alpha}} > 0$.
On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{1-\alpha}} < 1 &\iff 1 < 2^{1-\alpha} \\ &\iff \ln(1) < (1-\alpha)\ln(2) \quad (\text{par stricte croissance de } \ln \text{ sur }]0, +\infty[) \\ &\iff 1-\alpha > 0 \\ &\iff \alpha < 1 \end{aligned}$$

La série $\sum v_n$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

3. Soit $n \geq 2$. On remarque que $u_n = R_{n-1} - R_n$.

On en déduit que : $v_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^\alpha}$.

4. En prenant $\alpha = 1$,

a) Soit $n \geq 2$. On a

$$\ln(1 - v_n) = \ln\left(1 - \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}}\right) = \ln\left(\frac{R_n}{R_{n-1}}\right) = \ln(R_n) - \ln(R_{n-1})$$

b) Soit $n \geq 2$. Par sommation télescopique :

$$\sum_{k=2}^n \ln(1 - v_k) = \sum_{k=2}^n (\ln(R_k) - \ln(R_{k-1})) = \ln(R_n) - \ln(R_1)$$

Puisque la série $\sum u_n$ converge, il vient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(R_n) - \ln(R_1) = -\infty$.

Ainsi : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n \ln(1 - v_k) = -\infty$ et donc la série $\sum \ln(1 - v_n)$ diverge.

On sépare ensuite deux cas.

- × Si (v_n) ne converge pas vers 0, alors la série $\sum v_n$ diverge (grossièrement).
- × Si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\ln(1 - v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -v_n$ et donc les séries $\sum v_n$ et $\sum \ln(1 - v_n)$ ont même nature par critère de comparaison par équivalence. On en déduit que la série $\sum v_n$ diverge.

5. On suppose : $\alpha > 1$.

- a) On sait que $R_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout entier $n \geq N$, on a $0 < R_{n-1} < 1$. Par suite, pour tout entier $n \geq N$, on a $R_{n-1}^\alpha \leq R_{n-1}$ (car $\alpha > 1$).
- b) Pour tout entier $n \geq N$, on a :

$$v_n = \frac{u_n}{R_{n-1}^\alpha} \geq \frac{u_n}{R_{n-1}}$$

Or, la série $\sum \frac{u_n}{R_{n-1}}$ diverge d'après le cas $\alpha = 1$ traité à la question précédente. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum v_n$ converge.

6. On suppose : $0 < \alpha < 1$.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} dt &= \int_{R_n}^{R_{n-1}} t^{-\alpha} dt \\ &= \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_{R_n}^{R_{n-1}} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} (R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha}) \end{aligned}$$

- b) On pose $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$. La fonction f est décroissante sur $]0, +\infty[$. Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$v_n = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^\alpha} \leq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha} (R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha})$$

Or, puisque $1 - \alpha > 0$:

$$\sum_{k=2}^n (R_{k-1}^{1-\alpha} - R_k^{1-\alpha}) = R_1^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} R_1^{1-\alpha}$$

donc la série $\sum (R_{n-1}^{1-\alpha} - R_n^{1-\alpha})$ converge. Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum v_n$ converge également.