Planche HEC : étude d'une suite récurrente

Exercice avec préparation 1

On admet la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :

Si la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre réel L, alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{n}(u_0 + u_1 + \dots u_{n-1})$$

converge aussi vers L.

On se donne deux nombres réels α et β tels que $0 < \alpha < \beta$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n \frac{1+\alpha u_n}{1+\beta u_n}$$

1. **Question de cours** : Convergence et divergence des suites réelles monotones.

2. Dans cette question seulement, on suppose $\alpha = 1$ et $\beta = 2$.

a) Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = x\frac{1+x}{1+2x}$$

b) Étudier la convergence de la suite (u_n).

c) Soit le programme **Python** suivant :

```
def f(x):
    return x * (1+x) / (2+x)

x = np.arange(0.01, 5, 0.1)
plt.plot(x, f(x))

x = [0, 5]
plt.plot(x, x)

u = 2
x = [u]
y = [0]
for k in range(1, 11):
    z = f(u)
    x.append(u)
    x.append(z)
    y.append(z)
    y.append(z)
    u = z
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

Expliquer ce que fait ce programme et ce qu'il illustre.

3. Dans le cas général, prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Prouver que la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\beta - \alpha$.

5. En utilisant la propriété $(\mathcal{P})$, déduire du résultat précédent un équivalent de u_n de la forme $\frac{1}{qn}$ lorsque n tend vers $+\infty$, où q est un réel strictement positif.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit (u_n) une suite croissante.

- Si (u_n) est majorée, alors elle converge ;
- Si (u_n) n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Soit (u_n) une suite décroissante.

- Si (u_n) est minorée, alors elle converge ;
- Si (u_n) n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

2. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(x) = \frac{x + x^2}{1 + 2x}$$

donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de deux fonctions polynomiales dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$f'(x) = \frac{(1 + 2x)(1 + 2x) - 2(x + x^2)}{(1 + 2x)^2} = \frac{1 + 2x + 2x^2}{(1 + 2x)^2}$$

Posons $P(x) = 1 + 2x + 2x^2$ et notons Δ le discriminant de ce trinôme du second degré. On a :

$$\Delta = 4 - 4 \times 2 = -4 < 0$$

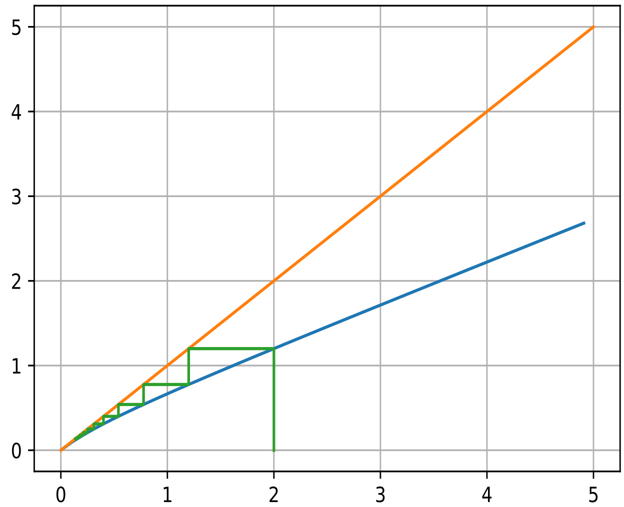
On en déduit que P n'admet pas de racines et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$ (signe du coefficient dominant).

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}_+.}$$

b)
- Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
  où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ et $u_{n+1} < u_n$ »
  Initialisation :
  Par hypothèse $u_0 > 0$. De plus :
  $$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1 + u_0}{1 + 2u_0} < 1$$
  donc $u_1 < u_0$. D'où $\mathcal{P}(0)$.
  Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n + 1)$.
  Par hypothèse de récurrence : $u_n > 0$ et $u_{n+1} < u_n$.
  Par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+$: $u_{n+1} = f(u_n) > f(0) = 0$.
  Toujours par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+$: $u_{n+2} = f(u_{n+1}) < f(u_n) = u_{n+1}$.
  D'où $\mathcal{P}(n + 1)$.
- D'après ce qui précède, la suite (u_n) est (strictement) décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant : $\ell \geqslant 0$.

c) Ce programme permet de tracer les 11 premiers termes de la suite (u_n) (on projette sur le graphe de f puis sur l'axe des ordonnées puis sur la droite d'équation $y = x$ puis sur l'axe des abscisses puis on recommence).

On obtient le graphique suivant (en bleu le graphe de f, en orange la droite d'équation $y = x$, en vert le tracé des premiers termes de la suite (u_n)) :



Ce programme illustre la décroissance et la convergence de la suite (u_n).

3. • On pose $f : x \mapsto x\dfrac{1+\alpha x}{1+\beta x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{(1+2\alpha x)(1+\beta x) - \beta(x+\alpha x^2)}{(1+\beta x)^2} = \frac{1+2\alpha x+\alpha\beta x^2}{(1+\beta x)^2}$$

Posons $P(x) = 1+2\alpha x+\alpha\beta x^2$ et notons Δ le discriminant de ce trinôme du second degré. On a :

$$\Delta = 4\alpha^2 - 4\alpha\beta = 4\alpha(\alpha-\beta) < 0$$

On en déduit que P n'admet pas de racines et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) > 0$ (signe du coefficient dominant). Ainsi, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

• Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $u_n > 0$ et $u_{n+1} < u_n$ »
<u>Initialisation</u> :
Par hypothèse $u_0 > 0$. De plus :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{1+\alpha u_0}{1+\beta u_0}$$

et $\alpha < \beta$ donc $\alpha u_0 < \beta u_0$ donc $1+\alpha u_0 < 1+\beta u_0$ donc $u_1/u_0 < 1$ (car $1+\beta u_0 > 0$) donc $u_1 < u_0$.
D'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence : $u_n > 0$ et $u_{n+1} < u_n$.
Par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+$: $u_{n+1} = f(u_n) > f(0) = 0$.
Toujours par stricte croissance de f sur $\mathbb{R}_+$: $u_{n+2} = f(u_{n+1}) < f(u_n) = u_{n+1}$.
D'où $\mathcal{P}(n+1)$.

• D'après ce qui précède, la suite (u_n) est (strictement) décroissante et minorée par 0. D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge vers un réel ℓ vérifiant : $\ell \geqslant 0$.

• La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de point fixe et on a donc : $\ell = f(\ell)$. Soit $x \geqslant 0$.

$$f(x) - x = x\left(\frac{1+\alpha x}{1+\beta x} - 1\right) = \frac{(\alpha-\beta)x^2}{1+\beta x}$$

donc

$$f(x) = x \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que la suite } (u_n) \text{ converge vers } 0.}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \\
&= \frac{1}{u_n \dfrac{1+\alpha u_n}{1+\beta u_n}} - \frac{1}{u_n} \\
&= \frac{1}{u_n}\left(\frac{1}{\dfrac{1+\alpha u_n}{1+\beta u_n}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{u_n}\left(\frac{1+\beta u_n}{1+\alpha u_n} - 1\right) \\
&= \frac{1}{u_n}\frac{(\beta-\alpha)u_n}{1+\alpha u_n} \\
&= \frac{\beta-\alpha}{1+\alpha u_n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Puisque } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ on obtient bien : } v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha.}$$

5. D'après la propriété $(\mathcal{P})$ appliquée à la suite $(v_{n+1} - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (v_{k+1} - v_k)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha$$

Par télescopage, on obtient :

$$\frac{v_n - v_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha$$

Or :

$$\frac{v_0}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où :

$$\frac{v_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \beta - \alpha$$

Puisque $\beta - \alpha > 0$, on peut alors écrire :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} (\beta-\alpha)n$$

$$\boxed{\text{Finalement, on obtient : } u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\beta-\alpha)n}.}$$