
Interrogation de rentrée

Pour réussir en Mathématiques, il faut...

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto x + 1 + \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$. » :

a) La variable f est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

c) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :

« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »

Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

2. On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ (où f est la fonction définie à la question précédente).

a) La variable n est

A. libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :

« La suite u_n est strictement croissante. »

Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

3. L'expression $\int_0^x (t+1)e^{ut} dt$ dépend de

A. x

B. t

C. u

D. ni x , ni t , ni u

4. L'expression $\sum_{k=0}^n u_k$ dépend de

A. n

B. k

C. n et k

D. ni n , ni k

5. Une variable muette est

A. libre

B. liée

C. parfois libre,
parfois liée

D. la réponse D

6. Dans l'écriture $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq f(x)\}$,

a) La variable f est

- A.** libre **B.** liée **C.** libre et liée **D.** ni libre ni liée

b) La variable x est

- A.** libre **B.** liée **C.** libre et liée **D.** ni libre ni liée

c) La variable y est

- A.** libre **B.** liée **C.** libre et liée **D.** ni libre ni liée

7. Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable k est

- A.** libre **B.** liée **C.** libre et liée **D.** ni libre ni liée

b) La variable X est

- A.** libre **B.** liée **C.** libre et liée **D.** ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

- A.** dépend toujours de n **B.** ne dépend jamais de n **C.** peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $\forall A > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n > A)$,

a) La variable A est

- A.** libre **B.** liée **C.** libre et liée **D.** ni libre ni liée

b) La variable n_0 est

- A.** libre **B.** liée **C.** libre et liée **D.** ni libre ni liée

c) La variable n est

- A.** libre **B.** liée **C.** libre et liée **D.** ni libre ni liée

10. Une variable liée

- A.** doit toujours **B.** ne doit jamais **C.** peut parfois

être introduite par un « Soit ».

Exercice 2

Écrire en toutes lettres le nom des lettres grecques suivantes :

1. α :

2. λ :

3. μ :

Exercice 3

Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
$f : t \mapsto 2e^{-2x}$		
u_n		
$\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$		
$(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$		
$x = 2$		
$\int_0^1 x^4 dx$		
$\sum_{n \geq 3} u_n$		
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$		

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 4

1. Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}.$$

2. On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\}$.

Exercice 5 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{2n+1} k$.

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée à l'aide de factorielles de $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$.

Exercice 7 Soit $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $(4, p)$. Calculer $\mathbb{E}(2X - 1)$ et $\mathbb{V}(2X - 1)$.

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 8

Soit $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit la loi géométrique de paramètre p .
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
 - a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

- b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.
3. Conclure.

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 9

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

- a) Écrire une fonction **Python** `f(x)` prenant en argument un réel x et renvoyant $f(x)$.
 - b) Écrire un script **Python** permettant de tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0, 10]$.

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python** `suiteU(n)` prenant en argument un entier n et renvoyant u_n .

3. On **admet** que la suite (u_n) converge. Ceci implique que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Écrire une fonction **Python** `petitPas(eps)` prenant en argument un réel $\varepsilon > 0$ (représenté par `eps`) et renvoyant le premier entier naturel n vérifiant : $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

4. Écrire une fonction **Python** `sommePartielle(n)` prenant en argument un entier $n \geq 0$ et renvoyant la somme $\sum_{k=0}^n u_k$.

5. On considère une urne contenant 10 boules blanches et 13 boules noires. On effectue un unique tirage dans cette urne et on définit la variable aléatoire de Bernoulli X de la manière suivante : X prend la valeur 1 si on tire une boule noire et la valeur 0 sinon. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X .

```
1 def simuX():
2     if _____
3         return 1
4     else:
5         return 0
```

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 10

Dans tout cet exercice, g désigne la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

On donne $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Soit $\varphi : x \mapsto x - e^{-x}$.

- Dresser le tableau de variations de φ . On fera apparaître les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.
- En déduire que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.
- Montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ et que cette solution est α .

3. a. Calculer, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x)$. Préciser $g'(0)$.

b. Dresser le tableau de variations de g . On fera apparaître la limite en $+\infty$.

c. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g . On fera apparaître en particulier la tangente en 0 à la courbe $\mathcal{C}_g$ et la droite d'équation $y = x$.

d. Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$g''(x) = -e^x \frac{3+x+(1-x)e^x}{(1+e^x)^3}$$

e. En déduire que g' est décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

f. On admet que $g'(\frac{1}{2}) \simeq 0,025$ et $g'(1) \simeq -0,124$.

En déduire que, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|g'(x)| \leq 0,125$. On note $M = 0,125$.

Partie II : Étude d'une suite

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \alpha$.

5. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

6. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

7. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} \leq u_n \leq \alpha$.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - \alpha| \leq M |u_n - \alpha|$.

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} M^{n-1}$.

d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha - u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

8. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n .

```
1 def suite(n):  
2     u = .....  
3     for k in range(n):  
4         u = .....  
5     return u
```

- b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel **epsilon** strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de α à **epsilon** près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):  
2     n = 1  
3     while .....  
4         n = n + 1  
5     return suite(n)
```