

Interrogation de rentrée (barème)

Pour réussir en Mathématiques, il faut...

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto x + 1 + \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$. » :

a) La variable f est

A. ☒ libre

B. liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre

B. ☒ liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

c) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :

« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »

Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

2. On introduit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par récurrence : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ (où f est la fonction définie à la question précédente).

a) La variable n est

A. libre

B. ☒ liée

C. libre et liée

D. ni libre ni liée

b) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :

« La suite u_n est strictement croissante. »

Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. L'expression $\int_0^x (t+1)e^{ut} dt$ dépend de

A. ☒ x

B. t

C. ☒ u

D. ni x , ni t , ni u

4. L'expression $\sum_{k=0}^n u_k$ dépend de

A. ☒ n

B. k

C. n et k

D. ni n , ni k

5. Une variable muette est

A. libre

B. ☒ liée

C. parfois libre,
parfois liée

D. la réponse D

6. Dans l'écriture $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq f(x)\}$,

a) La variable f est

- A. ☐ libre B. ☐ liée C. ☐ libre et liée D. ☐ ni libre ni liée

b) La variable x est

- A. ☐ libre B. ☐ liée C. ☐ libre et liée D. ☐ ni libre ni liée

c) La variable y est

- A. ☐ libre B. ☐ liée C. ☐ libre et liée D. ☐ ni libre ni liée

7. Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable k est

- A. ☐ libre B. ☐ liée C. ☐ libre et liée D. ☐ ni libre ni liée

b) La variable X est

- A. ☐ libre B. ☐ liée C. ☐ libre et liée D. ☐ ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

- A. ☐ dépend toujours de n B. ☐ ne dépend jamais de n C. ☐ peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $\forall A > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq n_0 \implies u_n > A)$,

a) La variable A est

- A. ☐ libre B. ☐ liée C. ☐ libre et liée D. ☐ ni libre ni liée

b) La variable n_0 est

- A. ☐ libre B. ☐ liée C. ☐ libre et liée D. ☐ ni libre ni liée

c) La variable n est

- A. ☐ libre B. ☐ liée C. ☐ libre et liée D. ☐ ni libre ni liée

10. Une variable liée

- A. ☐ doit toujours B. ☐ ne doit jamais C. ☐ peut parfois

être introduite par un « Soit ».

- 10 pts : on attribue 1 pt par réponse juste, pas de point négatif en cas de réponse fausse. On ajoute deux points si tout est juste. A la fin, division par 2 du total.

Exercice 2

Écrire en toutes lettres le nom des lettres grecques suivantes :

1. α : alpha 2. λ : lambda 3. μ : mu

• 2 pts si tout est juste, 1 pt si deux sont justes, 0 sinon

Exercice 3

Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).

Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
$f : t \mapsto 2e^{-2x}$	Objet	Fonction
u_n	Objet	Réel
$\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}\}$	Objet	Ensemble
$(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$	Objet	Suite
$x = 2$	Proposition	
$\int_0^1 x^4 dx$	Objet	Réel
$\sum_{n \geq 3} u_n$	Objet	Série
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$	Proposition	

- 7 pts : on attribue 1 pt par réponse juste, pas de point négatif en cas de réponse fausse.
A la fin, division par 2 du total.

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 4

1. a) Résoudre le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases}.$$

- 1 pt : pivot de Gauss bien effectué et expliqué
- 1 pt : raisonnement par équivalence

• 1 pt : résultat $\begin{cases} x &= \frac{4}{3}z \\ y &= -\frac{5}{3}z \end{cases}$

Aucun point si pas d'explication ou si autre chose qu'un pivot de Gauss

b) On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\}$.

• 1 pt : $U \in E_3(A) \iff \begin{cases} x &= \frac{4}{3}z \\ y &= -\frac{5}{3}z \end{cases}$

• 2 pt : $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

Exercice 5

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{2n+1} k$.

• 1 pt : $\sum_{k=1}^N k = \frac{N(N+1)}{2}$

• 1 pt : $\sum_{k=1}^{2n+1} k = \frac{(2n+1)((2n+1)+1)}{2} = (2n+1)(n+1)$ (0 pt si pas simplifié)

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée à l'aide de factorielles de $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)$.

• 1 pt : $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) \right) \left(\prod_{k=1}^n (2k) \right)}{\prod_{k=1}^n (2k)}$

• 1 pt : $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ (0 pt si pas simplifié)

Exercice 7 Soit $p \in]0, 1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $(4, p)$. Calculer $\mathbb{E}(2X - 1)$ et $\mathbb{V}(2X - 1)$.

• 1 pt : La variable aléatoire $2X - 1$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine d'une variable aléatoire admettant une espérance et une variance

• 1 pt : $\mathbb{E}(3X + 1) = 8p - 1$

• 1 pt : argument de linéarité cité

• 1 pt : $\mathbb{V}(3X + 1) = 16p(1 - p)$

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 8

Soit $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit une loi géométrique de paramètre p .

Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

- 1 pt : incompatibilité des événements de l'union considérée
- 1 pt : argument de somme géométrique correct

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k - 1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

- 1 pt : X est à valeurs entières
- 1 pt : incompatibilité des événements

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

- 1 pt : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$
- 2 pt : $\mathbb{P}([X = k]) = q^{k-1}p$

3. Conclure.

- 2 pt : écriture correcte de l'équivalence démontrée

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 9

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1 + e^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Écrire une fonction **Python** `f(x)` prenant en argument un réel x et renvoyant $f(x)$.

- 2 pts : 1 pt par ligne correcte

```
1 def f(x):  
2     return 1 / (1 + np.exp(x))
```

b) Écrire un script **Python** permettant de tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0, 10]$.

- 1 pt : `Xabs = np.linspace(0,10,1000)` (un autre nombre que 1000 est accepté si il est raisonnablement grand)
- 1 pt : `Yord = [f(x) for x in Xabs]`
- 1 pt : `plt.plot(Xabs, Yord)`

```
1 Xabs = np.linspace(0,10,1000) # ou bien Xabs = np.arange(0,10,0.01)  
2 Yord = [f(x) for x in Xabs]  
3 plt.plot(Xabs, Yord)  
4 plt.grid() # optionnel, pour avoir un quadrillage  
5 plt.show()
```

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python** `suiteU(n)` prenant en argument un entier n et renvoyant u_n .

- 1 pt : `u = 0`
- 1 pt : boucle `for` correcte (bonne taille)

- 1 pt : $u = f(u)$
- 1 pt : bonus si tout est correct

```

1 def suiteU(n):
2     u = 0
3     for k in range(n):
4         u = f(u)
5     return u

```

3. On **admet** que la suite (u_n) converge. Ceci implique que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Écrire une fonction **Python** `petitPas(eps)` prenant en argument un réel $\varepsilon > 0$ (représenté par `eps`) et renvoyant le premier entier naturel n vérifiant : $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

- 1 pt : $n = 0$ et $u = 0$
- 1 pt : `while np.abs(f(u) - u) >= eps:`
- 1 pt : `n += 1`
- 1 pt : `u = f(u)`
- 1 pt : `return n`

```

1 def petitPas(eps):
2     n = 0
3     u = 0
4     while np.abs(f(u) - u) >= eps:
5         n += 1
6         u = f(u)
7     return n

```

4. Écrire une fonction **Python** `sommePartielle(n)` prenant en argument un entier $n \geq 0$ et renvoyant la somme $\sum_{k=0}^n u_k$.

- 1 pt : $S = 0$
- 1 pt : `for k in range(0,n+1):`
- 1 pt : `S += suiteU(k)`
- 1 pt : bonus si tout est correct

```

1 def somme(n):
2     S = 0
3     for k in range(0,n+1):
4         S += suiteU(k)
5     return S

```

5. On considère une urne contenant 10 boules blanches et 13 boules noires. On effectue un unique tirage dans cette urne et on définit la variable aléatoire de Bernoulli X de la manière suivante : X prend la valeur 1 si on tire une boule noire et la valeur 0 sinon. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X .

- 2 pt : `rd.random() < 13/23:`

```

1 def simuX():
2     if rd.random() < 13/23:
3         return 1
4     else:
5         return 0

```

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 10

Dans tout cet exercice, g désigne la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$$

On donne $e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$ et $e \simeq 2,72$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Soit $\varphi : x \mapsto x - e^{-x}$.

a. Dresser le tableau de variations de φ . On fera apparaître les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

- 1 pt : La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- 1 pt : $\varphi'(x) = 1 + e^{-x} > 0$
- 1 pt :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	+	
Variations de φ	$-\infty$	$+\infty$

b. En déduire que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.

- 1 pt : La fonction φ est :
 - × continue sur $\mathbb{R}$
 - × strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- 1 pt : φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- 1 pt : $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$

c. Montrer que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

- 1 pt : $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0$
- 1 pt : $\varphi(1) > 0$
- 1 pt : la bijection réciproque de φ a même sens de variations que φ et donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ OU φ est strictement croissante

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ et que cette solution est α .

- 1 pt : $g(x) = x \iff \varphi(x) = 0$
- 1 pt bonus : vérification que α est bien dans $[0, +\infty[$

3. a. Calculer, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g'(x)$. Préciser $g'(0)$.

- 1 pt : la fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$

- 1 pt : $g'(x) = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$

- 1 pt : $g'(0) = \frac{1}{4}$

b. Dresser le tableau de variations de g . On fera apparaître la limite en $+\infty$.

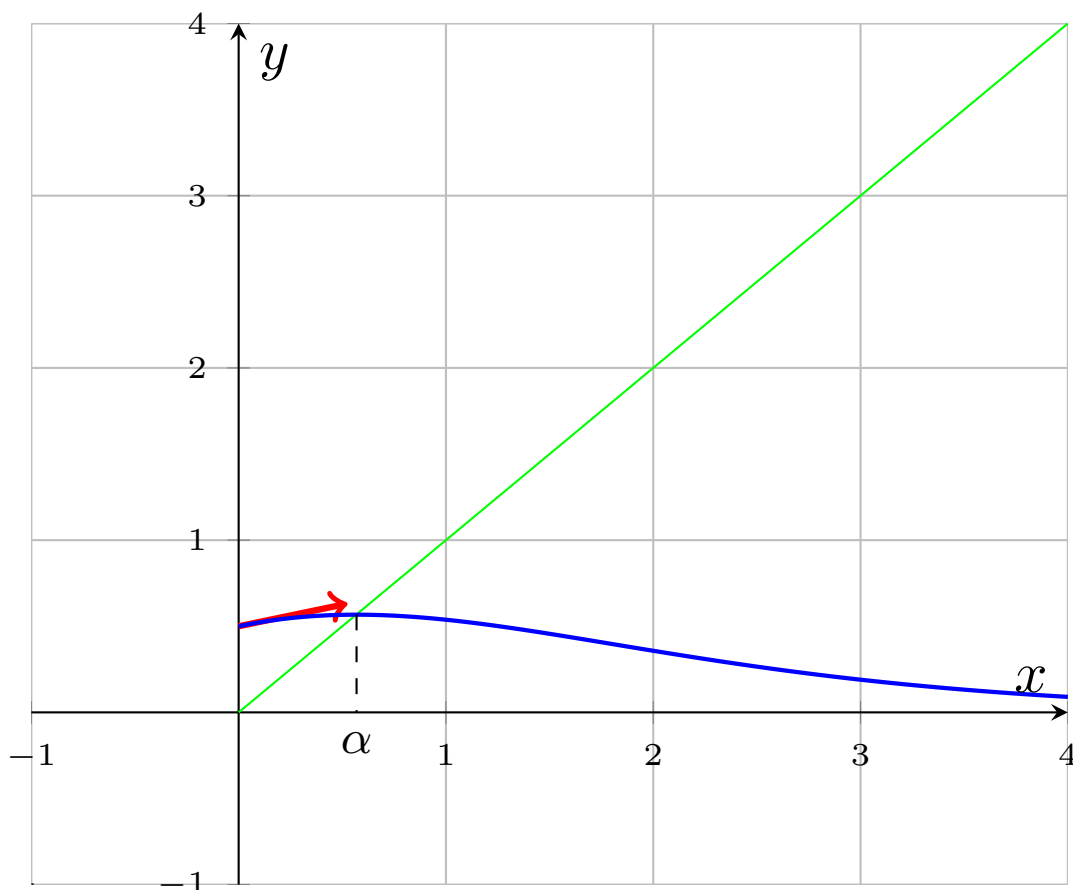
- 1 pt : $g'(x) > 0 \iff x < \alpha$

- 1 pt : Par croissance comparée, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

- 1 pt :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $g'(x)$	+	0	-
Variations de g	$\frac{1}{2}$ $\nearrow$ α $\searrow$ 0		

c. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g . On fera apparaître en particulier la tangente en 0 à la courbe $\mathcal{C}_g$ et la droite d'équation $y = x$.



- 1 pt : tangente en 0 raisonnable (0 pt si elle ne part pas du point $(0, \frac{1}{2})$)

- 1 pt : apparition du point remarquable α , abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec la droite d'équation $y = x$

- 1 pt : changement de monotonie en α

- 1 pt : limite en ∞ respectée

- 1 pt : allure globale de la courbe (tracé en une fois)

d. Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$g''(x) = -e^x \frac{3 + x + (1 - x)e^x}{(1 + e^x)^3}$$

- 2 pt : calcul correct
- e. En déduire que g' est décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

- 1 pt : $1 - x \geq 0$
 - 1 pt : explications raisonnables pour $g''(x) \leq 0$
- f. On admet que $g'(\frac{1}{2}) \simeq 0,025$ et $g'(1) \simeq -0,124$.
En déduire que, pour tout $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $|g'(x)| \leq 0,125$. On note $M = 0,125$.

- 1 pt : Par décroissance de g' , on a $g'(1) \leq g'(x) \leq g'(\frac{1}{2})$
- 1 pt : $-M \leq -0,124 \leq g'(x) \leq 0,025 \leq M$

Partie II : Étude d'une suite

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq \alpha$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pt : hérédité
- 1 pt : aspect « $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie » bien démontré

5. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

- 1 pt : initialisation
- 2 pt : hérédité

6. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

- 1 pt : la suite (u_n) est :
 - croissante
 - majorée par α
- 1 pt : théorème de convergence monotone cité
- 1 pt : par continuité de la fonction g en ℓ , $\ell = g(\ell)$

7. a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} \leq u_n \leq \alpha$.

- 1 pt : initialisation
 - 2 pt : hérédité
- b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - \alpha| \leq M |u_n - \alpha|$.
- 1 pt : hypothèses IAF ou question 3f bien citée
 - 1 pt : $|g(x) - g(y)| \leq M |x - y|$
 - 1 pt : u_n et α sont bien dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}M^{n-1}$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pt : hérédité

d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha - u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

- 1 pt : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq v_n \leq \frac{1}{2}M^{n-1}$.
- 1 pt : La série $\sum M^n$ est géométrique de raison $M \in]-1, 1[$ donc converge. Donc la série $\sum \frac{1}{2}M^{n-1}$ converge.
- 1 pt : Par critère de comparaison pour les SATP, la série $\sum v_n$ converge.

8. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n .

```

1 def suite(n):
2     u = .....
3     for k in range(n):
4         u = .....
5     return u

```

```

1 def suite(n):
2     u = 0
3     for k in range(n):
4         u = (1+u)/(1+np.exp(u))
5     return u

```

- 1 pt : $u = 0$
- 1 pt : $u = (1+u)/(1+np.exp(u))$

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel ϵ strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de α à ϵ près.

```

1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while .....
4         n = n + 1
5     return suite(n)

```

```

1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while 0.5 * 0.125**(n-1) > epsilon:
4         n = n + 1
5     return suite(n)

```

- 2 pt : `while 0.5 * 0.125**(n-1) > epsilon:`