Interrogation de rentrée (correction)

Pour réussir en Mathématiques, il faut...

I. Comprendre que c'est un langage et apprendre à le parler

Exercice 1. *Entourer la ou les bonne(s) réponse(s). Aucune justification n'est attendue.*

1. Dans la phrase « On note f la fonction $x \mapsto x + 1 + \ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$. » :

a) La variable f est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :
« La fonction $f(x)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. »
Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[.}$$

2. On introduit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence : $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ (où f est la fonction définie à la question précédente).

a) La variable n est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) Un·e élève peut attentionné·e a ensuite rédigé la chose suivante :
« La suite u_n est strictement croissante. »
Réécrire cette phrase pour qu'elle soit correcte.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante.}}$$

3. L'expression $\displaystyle\int_0^x (t+1)\mathrm{e}^{ut}\mathrm{d}t$ dépend de

A. $\boxed{x}$ ***B.*** t ***C.*** $\boxed{u}$ ***D.*** ni x, ni t, ni u

4. L'expression $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ dépend de

A. $\boxed{n}$ ***B.*** k ***C.*** n et k ***D.*** ni n, ni k

5. Une variable muette est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** parfois libre, parfois liée ***D.*** la réponse D

6. Dans l'écriture $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant f(x)\}$,

a) La variable f est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable x est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable y est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

7. Dans la phrase « La famille $([X = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements. »,

a) La variable k est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable X est

A. $\boxed{\text{libre}}$ ***B.*** liée ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

8. Soit (u_n) une suite admettant une limite (finie ou non). La quantité $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

A. dépend toujours de n ***B.*** $\boxed{\text{ne dépend jamais de } n}$ ***C.*** peut dépendre de n

9. Dans l'écriture : $\forall A > 0, \exists n_0, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \implies u_n > A)$,

a) La variable A est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

b) La variable n_0 est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

c) La variable n est

A. libre ***B.*** $\boxed{\text{liée}}$ ***C.*** libre et liée ***D.*** ni libre ni liée

10. Une variable liée

A. doit toujours ***B.*** $\boxed{\text{ne doit jamais}}$ ***C.*** peut parfois

être introduite par un « Soit ».

Exercice 2

Écrire en toutes lettres le nom des lettres grecques suivantes :

1. α : alpha ***2.*** λ : lambda ***3.*** μ : mu

Exercice 3

Pour chacune des expressions suivantes : déterminer si elle désigne une proposition ou un objet. Si c'est un objet, précisez de quel type d'objet il s'agit (réel, fonction, suite, série, ensemble).
Aucune justification n'est attendue pour ces questions.

Expression	Objet / Proposition	Type d'objet
$f : t \mapsto 2\mathrm{e}^{-2x}$	Objet	Fonction
u_n	Objet	Réel
$\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\}$	Objet	Ensemble
$(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$	Objet	Suite
$x = 2$	Proposition	
$\displaystyle\int_0^1 x^4 \, dx$	Objet	Réel
$\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} u_n$	Objet	Série
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}$	Proposition	

II. Savoir calculer et présenter ses résultats sous forme simplifiée

Exercice 4

1. Résoudre le système suivant : $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\,x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3\,z & = & 0 \\ 3\,x & + & 3\,y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$.

Démonstration.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 5z & = & 0 \\ & & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & z \\ & & 3y & = & -5z \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 3L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rcrcl} 6x & & & = & 8z \\ & & 3y & = & -5z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & \dfrac{4}{3}\, z \\ & & y & = & -\dfrac{5}{3}\, z \end{array}\right.$$

$\square$

2. On note : $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(A) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AU = U\}$.

Démonstration.

- Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} U \in E_1(A) & \Leftrightarrow & AU = U \\ & \Leftrightarrow & (A - I)\, U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ & \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcrcl} x & & & = & \dfrac{4}{3}\, z \\ & & y & = & -\dfrac{5}{3}\, z \end{array}\right. \qquad \textit{(d'après la question précédente)} \end{array}$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = \frac{4}{3}z,\ y = -\frac{5}{3}z\} \\
&= \{\begin{pmatrix} \frac{4}{3}z \\ -\frac{5}{3}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \{z \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)}$$

□

Exercice 5 Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{2n} k$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{2n+1} k = \frac{(2n+1)((2n+1)+1)}{2} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{2} = (2n+1)(n+1)$$

□

Exercice 6 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une expression simplifiée à l'aide de factorielles de $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1}(2k+1)\right)\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(2k)} = \frac{(2n)!}{2^n \prod\limits_{k=1}^{n} k} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

□

Exercice 7 Soit $p \in \,]0,1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $(4,p)$. Calculer $\mathbb{E}(2X-1)$ et $\mathbb{V}(2X-1)$.

Démonstration. La variable aléatoire $2X-1$ admet une espérance et une variance en tant que transformée affine d'une variable aléatoire admettant une espérance et une variance.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(2X-1) &= 2\mathbb{E}(X)-1 && \textit{(par linéarité)} \\
&= 2\times 4p-1 \\
&= 8p-1
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(2X-1) &= 4\mathbb{V}(X) && \textit{(par propriété de la variance)} \\
&= 4\times 4p(1-p) \\
&= 16p(1-p)
\end{aligned}$$

□

III. Comprendre que le langage mathématique est soumis à des règles logiques et apprendre à raisonner en accord avec elles

Exercice 8

Soit $p \in \,]0,1[$. On pose $q = 1-p$. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

1. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que la v.a.r. X suit la loi géométrique de paramètre p.
Montrer : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X>k]) = q^k$.

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}$.

- On remarque tout d'abord :

$$[X>k] = \bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X=i]$$

- On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X>k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k+1}^{+\infty} [X=i]\right) \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}([X=i]) && \textit{(par incompatibilité de } [X=k+1],\ [X=k+2],\ \ldots\textit{)} \\
&= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p\, q^{i-1} \\
&= p \sum_{i=k+1}^{+\infty} q^{i-1} \\
&= p \sum_{i=0}^{+\infty} q^{k+i} \\
&= pq^k \sum_{i=0}^{+\infty} q^i \\
&= pq^k \frac{1}{1-q} && \textit{(on reconnaît une série géométrique de raison } q \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= q^k && \textit{(car } 1-q=p\textit{)}
\end{aligned}$$

□

2. Dans cette question (et dans cette question seulement), on suppose que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X > k]) = q^k$.

a) Démontrer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}([X = k]) \ = \ \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k])$$

Démonstration.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} [X > k-1] &= [X \geqslant k] && \textit{(car } X \textit{ est à valeurs entières)} \\ &= [X = k] \cup [X > k] \end{aligned}$$

Les événements $[X = k]$ et $[X > k]$ sont incompatibles. On en déduit :

$$\mathbb{P}([X > k-1]) = \mathbb{P}([X = k]) + \mathbb{P}([X > k])$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}([X = k]) = \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]).}$$

□

b) Démontrer que la variable aléatoire X suit alors la loi $\mathcal{G}(p)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, d'après l'énoncé : $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
- Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k]) &= \mathbb{P}([X > k-1]) - \mathbb{P}([X > k]) && \textit{(d'après la question précédente)} \\ &= q^{k-1} - q^k && \textit{(par hypothèse de la question } \textbf{\textit{1.b)}}\textit{)} \\ &= q^{k-1}(1-q) \ = \ q^{k-1} p \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la v.a.r. } X \text{ suit la loi } \mathcal{G}(p).}$$

□

3. Conclure.

Démonstration.

- D'après la question ***1.a)*** : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Rightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$.
- D'après la question ***1.b)*** : $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k \quad \Rightarrow \quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.
- Ainsi, si X est une variable à valeurs dans $\mathbb{N}^*$:

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = q^k$$

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{On obtient ainsi une nouvelle caractérisation de la loi géométrique, à savoir :} \\ X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \quad \Leftrightarrow \quad \big(\ X(\Omega) \subset \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([X > k]) = (1-p)^k \ \big) \end{array}}$$

□

IV. Comprendre que les questions Python sont (le plus souvent) simples, répétitives et qu'elles rapportent beaucoup de points

Exercice 9

1. On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) Écrire une fonction **Python** `f(x)` prenant en argument un réel x et renvoyant $f(x)$.

Démonstration.

```
def f(x):
    return 1 / (1 + np.exp(x))
```

□

b) Écrire un script **Python** permettant de tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0, 10]$.

Démonstration.

```
Xabs = np.linspace(0,10,1000) # ou bien Xabs = np.arange(0,10,0.01)
Yord = [f(x) for x in Xabs]
plt.plot(Xabs, Yord)
plt.grid() # optionnel, pour avoir un quadrillage
plt.show()
```

□

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Écrire une fonction **Python** `suiteU(n)` prenant en argument un entier n et renvoyant u_n.

Démonstration.

```
def suiteU(n):
    u = 0
    for k in range(n):
        u = f(u)
    return u
```

□

3. On **admet** que la suite (u_n) converge. Ceci implique que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Écrire une fonction **Python** `petitPas(eps)` prenant en argument un réel $\varepsilon > 0$ (représenté par `eps`) et renvoyant le premier entier naturel n vérifiant : $|u_{n+1} - u_n| < \varepsilon$.

Démonstration.

```python
def petitPas(eps):
    n = 0
    u = 0
    while np.abs(f(u) - u) >= eps:
        n += 1
        u = f(u)
    return n
```

On peut également proposer une fonction faisant moins de calculs :

```python
def petitPas(eps):
    n = 0
    u = 0 # u représente u_n
    v = f(u) # v représente u_{n+1}
    while np.abs(v - u) >= eps:
        n += 1
        u = v
        v = f(v)
    return n
```

En effet, à chaque tour de boucle on ne calcule qu'une seule fois l'image d'un réel par f dans cette deuxième fonction (contrairement à la fonction précédente qui fait deux fois le même calcul). □

4. Écrire une fonction **Python** `sommePartielle(n)` prenant en argument un entier $n \geqslant 0$ et renvoyant la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

Démonstration.

```python
def somme(n):
    S = 0
    for k in range(0,n+1):
        S += suiteU(k)
    return S
```

On peut également proposer une fonction faisant moins de calculs :

```python
def somme(n):
    S = 0
    u = 0
    for k in range(0,n+1):
        S += u
        u = f(u)
    return S
```

En effet, l'appel `suiteU(k)` est très inefficace car il calcule u_k à partir de u_0. On fait donc plein de fois le même calcul dans la première fonction. Pour gagner du temps, il vaut mieux stocker u_k dans une variable `u` et mettre à jour cette variable après l'avoir ajouté à la somme. □

5. On considère une urne contenant 10 boules blanches et 13 boules noires. On effectue un unique tirage dans cette urne et on définie la variable aléatoire de Bernoulli X de la manière suivante : X prend la valeur 1 si on tire une boule noire et la valeur 0 sinon. Compléter la fonction **Python** suivante pour qu'elle simule la variable aléatoire X.

Démonstration. Par équiprobabilité, on a : $\mathbb{P}([X = 1]) = \dfrac{13}{23}$. On en déduit la complétion suivante :

```
def simuX():
    if  rd.random() < 13/23:
        return 1
    else:
        return 0
```

□

V. Comprendre qu'un sujet de concours est tenu par une logique interne explicitée par la numérotation des questions et réussir à faire le lien entre les questions en prenant du recul

Exercice 10 `(EML 1997)`
Dans tout cet exercice, g désigne la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in \ [0, +\infty[, \ g(x) = \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x}$$

On donne $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65$ et $\mathrm{e} \simeq 2,72$.

Partie I : Étude de la fonction g

1. Soit $\varphi : x \mapsto x - \mathrm{e}^{-x}$.

a. Dresser le tableau de variations de φ. On fera apparaître les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

Démonstration.

- La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\varphi'(x) \ = \ 1 + \mathrm{e}^{-x} > 0$$
Donc φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	$+$	
Variations de φ	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

- Détaillons les éléments de ce tableau.
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$.
  $$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty.}$$
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -\mathrm{e}^{-x} = -\infty$.
  $$\boxed{\text{Donc : } \lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty.}$$

□

b. En déduire que l'équation $e^{-x} = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. On notera α cette solution.

Démonstration.

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$e^{-x} = x \iff x - e^{-x} = 0 \iff \varphi(x) = 0$$
- La fonction φ est :
  × continue sur $\mathbb{R}$
  × strictement croissante sur $\mathbb{R}$

  Ainsi, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
  De plus, $0 \in \mathbb{R}$, donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
  On note α cette solution, d'où le résultat.

□

c. Montrer que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

Démonstration.

- On a $\varphi\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$. Or, $0 < e^{\frac{1}{2}} \simeq 1,65 < 2$, d'où, par passage à l'inverse ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$) : $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{e^{\frac{1}{2}}}$.
$$\boxed{\text{Donc : } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) < 0.}$$
- On a $\varphi(1) = 1 - \dfrac{1}{e}$. Or, $0 < 1 < e \simeq 2,72$, d'où, par passage à l'inverse : $\dfrac{1}{e} < 1$.
$$\boxed{\text{Donc : } \varphi(1) > 0.}$$
- On a $\varphi(\alpha) = 0$ donc, d'après ce qui précède :
$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi(1)$$
  On applique à cet encadrement la bijection réciproque de φ (qui a même sens de variations que φ et donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}$). On obtient $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

□

2. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution sur $[0, +\infty[$ et que cette solution est α.

Démonstration. Soit $x \in [0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} g(x) = x &\iff \frac{1+x}{1+\mathrm{e}^x} = x \\ &\iff 1 + x = x(1 + \mathrm{e}^x) \\ &\iff 1 = x\mathrm{e}^x \\ &\iff \mathrm{e}^{-x} = x \\ &\iff x = \alpha && \text{d'après les questions 1b et 1c (on a bien } \alpha \geqslant 0) \end{aligned}$$

□

3. ***a.*** Calculer, pour tout $x \in \; [0, +\infty[$, $g'(x)$. Préciser $g'(0)$.

Démonstration.

- La fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Soit $x \in \; [0, +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{(1 + \mathrm{e}^x) - (1 + x)\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2} = \frac{1 - x\mathrm{e}^x}{(1 + \mathrm{e}^x)^2}$$

- En particulier, $g'(0) = \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{1}{4}$.

□

b. Dresser le tableau de variations de g. On fera apparaître la limite en $+\infty$.

Démonstration.

- Soit $x \in \; [0, +\infty[$.

$$g'(x) > 0 \iff 1 - x\mathrm{e}^x > 0 \iff 1 > x\mathrm{e}^x \iff \mathrm{e}^{-x} > x \iff \varphi(x) < 0 \iff x < \alpha$$

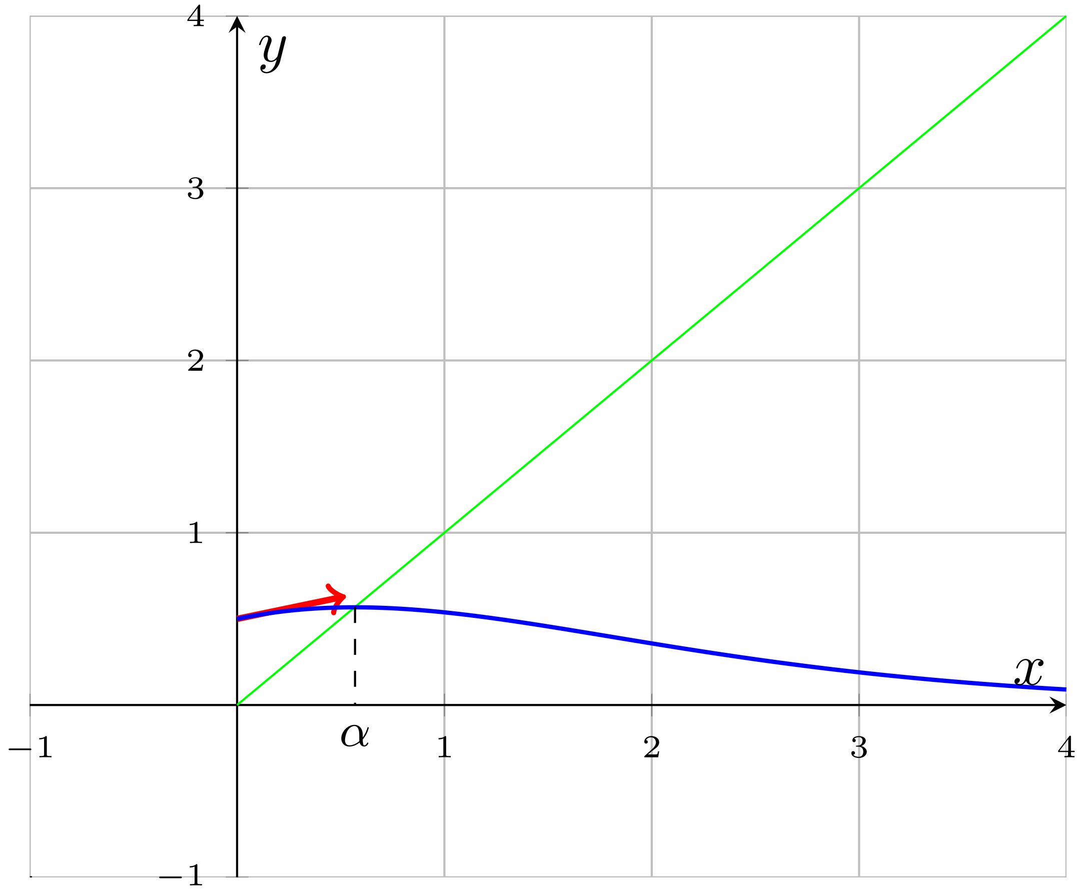
- Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
- On obtient le tableau de variations :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de g	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	α	$\searrow$	0

□

c. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ de la fonction g. On fera apparaître en particulier la tangente en 0 à la courbe $\mathscr{C}_g$ et la droite d'équation $y = x$.

Démonstration.



□

d. Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$g''(x) = -\mathrm{e}^x \frac{3 + x + (1-x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3}$$

Démonstration. Utiliser la formule de dérivation d'un quotient puis factoriser et simplifier au maximum. □

e. En déduire que g' est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Démonstration. Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
On a alors $1 - x \geqslant 0$ et donc $\frac{3+x+(1-x)\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^3} \geqslant 0$ et donc $g''(x) \leqslant 0$. □

f. On admet que $g'(\frac{1}{2}) \simeq 0,025$ et $g'(1) \simeq -0,124$.
En déduire que, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|g'(x)| \leqslant 0,125$. On note $M = 0,125$.

Démonstration. Soit $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Par décroissance de g', on a

$$g'(1) \leqslant g'(x) \leqslant g'\left(\frac{1}{2}\right)$$

d'où

$$-M \leqslant -0,124 \leqslant g'(x) \leqslant 0,025 \leqslant M$$

et donc $|g'(x)| \leqslant M$. □

Partie II : Étude d'une suite

On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$
où $P(n)$: « u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$ ».

- Initialisation :
  $u_0 = 0$ donc u_0 est bien défini et $0 \leqslant u_0 \leqslant \alpha$ (car $\alpha > \frac{1}{2} > 0$). D'où $P(0)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  u_n est bien défini et $u_n \geqslant 0$. De plus, g est définie sur $[0, +\infty[$, donc $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini. D'autre part, g est croissante sur $[0, \alpha]$ et $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$. Donc $\frac{1}{2} = g(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant g(\alpha) = \alpha$. D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$. □

5. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$
où $P(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ ».

- Initialisation :
  $u_0 = 0$ et $u_1 = \frac{1}{2}$ donc $u_1 \geqslant u_0$. D'où $P(0)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  On a $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$. Or, g est croissante sur $[0, \alpha]$. D'où $u_{n+1} = g(u_n) \leqslant g(u_{n+1}) = u_{n+2}$. D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$. □

6. Démontrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Démonstration. D'après les questions précédentes, la suite (u_n) est :

- croissante
- majorée par α

Par théorème de convergence monotone, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie : $\ell \leqslant \alpha$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$, or :

- $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$
- $g(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} g(\ell)$ par continuité de la fonction g en ℓ

Par unicité de la limite, $\ell = g(\ell)$. D'où $\ell = \alpha$. □

7. ***a)*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$
où $P(n)$: « $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$ ».

- Initialisation :
  $u_1 = g(0) = \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant \alpha$. D'où $P(1)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  La fonction g est croissante sur $[0, \alpha]$ et $0 < \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$. Donc $\frac{1}{2} = g(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant g(\alpha) = \alpha$.
  D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \alpha$. □

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\,|u_n - \alpha|$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $x = u_n$ et $y = \alpha$. D'après ce qui précède, $(x, y) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]^2$. De plus, la fonction g est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et vérifie : pour tout $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $|g'(t)| \leqslant M$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on obtient :

$$|g(x) - g(y)| \leqslant M\,|x - y|$$

d'où

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant M\,|u_n - \alpha|$$

□

c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} M^{n-1}$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$
où $P(n)$: « $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} M^{n-1}$ ».

- Initialisation :
  $u_1 = g(0) = \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1$. Donc $|u_1 - \alpha| = \alpha - \dfrac{1}{2} \leqslant 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
  D'autre part, $\dfrac{1}{2} M^{1-1} = \dfrac{1}{2}$.
  D'où $P(1)$.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \alpha| &\leqslant M\,|u_n - \alpha| && \text{cf question 7b} \\ &\leqslant M \frac{1}{2} M^{n-1} && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant \frac{1}{2} M^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

  D'où $P(n+1)$.

Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2} M^{n-1}$. □

d) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \alpha - u_n$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Démonstration.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant v_n \leqslant \dfrac{1}{2}M^{n-1}$.
- La série $\sum M^n$ est géométrique de raison $M \in]-1,1[$ donc converge. Donc la série $\sum \dfrac{1}{2}M^{n-1}$ converge.

Par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge. □

8. a) Recopier et compléter la fonction **Python** suivante qui, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}$, renvoie la valeur de u_n.

```
def suite(n):
    u = ..........
    for k in range(n):
        u = ..........
    return u
```

Démonstration.

```
def suite(n):
    u = 0
    for k in range(n):
        u = (1+u)/(1+np.exp(u))
    return u
```

□

b) Recopier et compléter la ligne 3 de la fonction **Python** suivante afin que, prenant en argument un réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de α à `epsilon` près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while ..........
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

Démonstration.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2     n = 1
3     while 0.5 * 0.125**(n-1) > epsilon:
4         n = n + 1
5     return suite(n)
```

□