Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $m \in [\![0, n-1]\!]$. Une expérience est conduite pour étudier la mémoire des rats, dont voici le protocole :

- On place un rat devant n couloirs.
- Au bout de l'un d'eux se trouve sa nourriture préférée, tandis qu'au bout des autres, il n'y a rien.
- Le rat teste aléatoirement les couloirs jusqu'à-ce qu'il trouve la nourriture. A chaque fois que le rat teste un couloir, on dit que le rat fait un *trajet*, même si il avait déjà testé ce couloir précédemment.
- L'expérience s'arrête lorsque le rat trouve la nourriture pour la première fois.

On note R_n : « le rat trouve la nourriture en moins de n trajets » (au sens large).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k : « le rat trouve la nourriture lors du k^{e} trajet ».

On note (H_m) l'hypothèse : le rat se souvient exactement des m derniers trajets mais pas de ceux d'avant.

1. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = \overline{A_1} \cap \cdots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k$.
   Autrement dit, les événements « le rat trouve la nourriture lors du k^{e} trajet » et « le rat trouve la nourriture pour la première fois lors du k^{e} trajet » coincïdent.

On se place dans le cas $n = 3$.

2. Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_k)$ puis en déduire $\mathbb{P}(R_n)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) sous l'hypothèse (H_0) (le rat n'a aucun souvenir des trajets précédents).
   (b) sous l'hypothèse (H_1) (le rat se souvient uniquement du dernier trajet).
   (c) sous l'hypothèse (H_2) (le rat se souvient exactement des deux derniers trajets).
   On pourra présenter les résultats dans un tableau récapitulatif.
3. Les chercheurs possèdent trois rats. Le premier à une mémoire (H_0), le deuxième une mémoire (H_1) et le dernier une mémoire (H_2). Calculer $\mathbb{P}(R_n)$ en supposant que le rat est choisit au hasard parmi les trois.

On revient au cas général ($n \geqslant 1$ et $m \in [\![0, n-1]\!]$) et on suppose que l'hypothèse (H_m) est vérifiée.

4. Donner, en justifiant brièvement, la valeur de $\mathbb{P}(R_n)$ dans le cas où $m = n - 1$.
5. On suppose dans cette question que $m \in [\![0, n-2]\!]$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(A_k)$ en séparant les cas $1 \leqslant k \leqslant m+1$ et $m+2 \leqslant k \leqslant n$.
   (b) En déduire $\mathbb{P}(R_n)$.
   (c) Montrer que la formule obtenue reste valable pour $m = n - 1$.
6. On fixe l'entier m. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1 - \mathrm{e}^{-1}$. *(On donne $1 - e^{-1} \simeq 0,63$)*

Des rats d'un autre genre.

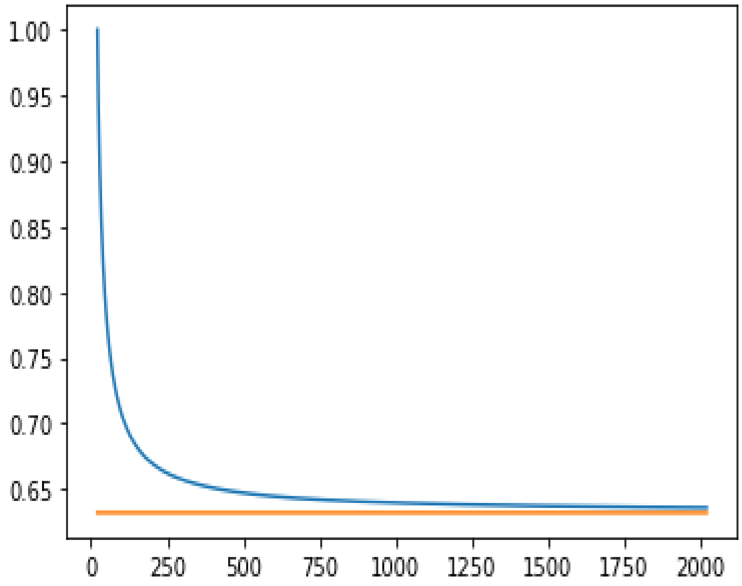
7. Les chercheurs ont trouvé comment créer des X-rats©, capables d'accroître leurs capacités de mémoire à l'infini en s'entraînant dans des labyrinthes toujours plus grand. Leur rat le plus performant, baptisé Gauss, à une mémoire de type (H_m) où $m = \lfloor \alpha n \rfloor$ avec $\alpha \in]0, 1[$ (α est fixé).
   On suppose que c'est le X-rat© Gauss qui participe à l'expérience dans cette question.
   (a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(R_n) = 1 - (1 - \alpha)\mathrm{e}^{-1}$.
   (b) En déduire la valeur minimale pour α si l'on souhaite que le X-rat© Gauss réussisse à trouver la nourriture en moins de n trajets plus de 9 fois sur 10 lorsque n est très grand.

Partie informatique.

8. Compléter le programme **Python** suivant pour qu'il trace les 2000 premiers termes de la suite $(\mathbb{P}(R_n))_{n \geq 21}$ sous l'hypothèse H_{20}.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
A = [n for n in range(21,2022)]
C = [1-np.exp(-1) for n in A]
m = 20
U = ________________________________________
plt.plot(A,U)
plt.plot(A,C)
```

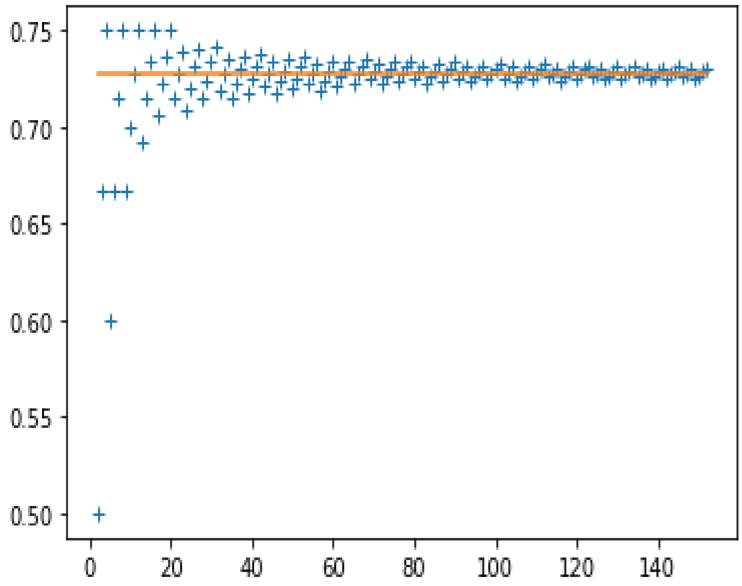
On obtient le tracé :



Quel résultat retrouve-t-on ainsi ?

9. Ecrire une fonction en **Python**, nommée **PlusPetitReussite**, qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et qui renvoie le plus petit entier m vérifiant : $\mathbb{P}(R_n) \geqslant \frac{9}{10}$ sous l'hypothèse (H_m).
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note u_n cet entier m minimal.
10. On affiche ci-dessous le tracé obtenu en utilisant le programme **Python** suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
A = [n for n in range(2,153)]
C = [1-np.exp(1)/10 for n in A]
U = [PlusPetitReussite(n)/n for n in A]
plt.plot(A,C)
plt.plot(A,U,"+")
```



Que conjecturez-vous comme équivalent de u_n ?

Démonstration.

1. Si le rat trouve la nourriture au k^{e} trajet, alors il ne peut pas l'avoir trouvée avant d'après le protocole.
2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{2^{k-1}}{3^k}$. D'où $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = \frac{19}{27}$

   (b) $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}$ et pour tout $k \geq 2$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{3\times 2^{k-2}}$. D'où $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = \frac{5}{6}$

   (c) Pour tout $k \in [\![1,3]\!]$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{3}$ et pour tout $k \geq 4$, $\mathbb{P}(A_k) = 0$. D'où $\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 1$

   On peut rassembler ces résultats dans un tableau :

Hypothèse	$\mathbb{P}(A_1)$	$\mathbb{P}(A_2)$	$\mathbb{P}(A_3)$	$\cdots$	$\mathbb{P}(A_k)$	$\cdots$	$\mathbb{P}(R_n)$
(H_0)	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$		$\frac{2^{k-1}}{3^k}$		$\frac{19}{27}$
(H_1)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{3\times 2^{k-2}}$		$\frac{5}{6}$
(H_2)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		0		1

3. On applique la FPT : $\mathbb{P}(R_n) = \frac{137}{162}$.
4. Dans le pire des cas, le rat ne trouve pas la nourriture lors des $n-1$ premiers trajets. Mais alors il ne lui reste plus qu'un couloir a testé (il sait que les autres sont vides) et donc il trouve la nourriture lors du n^{e} trajet. D'où $\mathbb{P}(R_n) = 1$.
5. (a) Si $1 \leqslant k \leqslant m+1$, alors $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}$. Si $m+2 \leqslant k \leqslant n$, alors $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^{k-m-1}$.

   (b) $\mathbb{P}(R_n) = \frac{m+1}{n} + \frac{n-m-1}{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^{n-m-1}\right) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n-m}\right)^{n-m}\right)$.

   (c) On remplace m par $n-1$ dans la formule ci-dessus et on vérifie qu'on trouve 1.
6. Forme exponentielle et équivalent usuel
7. (a) il faut connaître l'équivalent $\lfloor \alpha n \rfloor \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha n$ (car $\alpha > 0$). Ensuite, c'est comme à la question 6.

   (b) $\alpha \geqslant 1 - \frac{\mathrm{e}}{10}$
8. Le programme se complète en :

```
import math
import matplotlib.pyplot as plt
A = [n for n in range(21,2022)]
C = [1-math.exp(-1) for n in A]
m = 20
U = [m/n + ((n-m)/n)*(1-(1-1/(n-m))**(n-m)) for n in A]
plt.plot(A,U)
plt.plot(A,C)
```

   On retrouve le résultat de la question 6 à l'aide du tracé.
9. La fonction s'écrit :

```
def PlusPetitReussite(n) :
    m = 0
    while m/n + ((n-m)/n)*(1-(1-1/(n-m))**(n-m)) < 9/10 :
        m = m+1
    return m
```

10. On conjecture que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(1 - \frac{\mathrm{e}}{10}\right) n$.

$\square$