DS2 (version A) - correction

Exercice 1 (inspiré de EDHEC 2021)

On considère un nombre réel a et on pose $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice M_a soit inversible.

Démonstration. La matrice M_a est triangulaire inférieure. Ainsi, la matrice M_a est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. D'où

$$\boxed{M_a \text{ est inversible si et seulement si } a \neq 0}$$

□

A partir de maintenant et ce, jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que a est un élément de $]0,1[$.

2. a) Déterminer une base et la dimension de $E_1(M_a) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid M_a U = U\}$.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (M_a - I_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ (1-a)x + (a-1)y = 0 \\ (1-a)y + (a-1)z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \textit{(en divisant par } 1-a \neq 0\textit{)} \\
&\iff \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E_1(M_a) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y, z = y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_1(M_a)$

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(M_a) \text{ et } \dim(E_1(M_a)) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_1) = 1.}$$

□

b) Déterminer une base et la dimension de $E_a(M_a) = \{U \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid M_a U = aU\}$.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}
U \in E_a(A) &\iff (M_a - aI_3)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} (1-a)x & = 0 \\ (1-a)x & = 0 \\ (1-a)y & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x & = 0 \\ x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases} \qquad \textit{(en divisant par } 1-a \neq 0\textit{)} \\
&\iff \begin{cases} x & = 0 \\ y & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
E_a(M_a) &= \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = y = 0\} \\
&= \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

La famille $\mathcal{F}_a = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

× engendre $E_a(M_a)$

× est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

On en déduit que :

$$\boxed{\mathcal{F}_a \text{ est une base de } E_a(M_a) \text{ et } \dim(E_a(M_a)) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}_a) = 1.}$$

□

c) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.

Démonstration. La matrice M_a est triangulaire inférieure donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. On en déduit que $\mathrm{Sp}(M_a) = \{1, a\}$.
Supposons que M_a soit diagonalisable. Alors il existe une base (U, V, W) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de M_a. D'après le principe des tiroirs, deux de ces vecteurs propres sont dans $E_1(M_a)$ ou dans $E_a(M_a)$. On a donc trouvé une famille libre de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 1. C'est absurde.

$$\boxed{\text{On en déduit que la matrice } M_a \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

□

3. On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

a) Quelle est la dimension de E ?

Démonstration. On a

$$M_a^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2a(1-a) & a^2 \end{pmatrix}$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$\lambda_1 I + \lambda_2 M_a + \lambda_3 M_a^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_2(1-a) + \lambda_3(1-a^2) & \lambda_1 + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 & 0 \\ \lambda_3(1-a)^2 & \lambda_2(1-a) + \lambda_3 2a(1-a) & \lambda_1 + \lambda_2 a + \lambda_3 a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 + & \lambda_2 + & \lambda_3 & = 0 \\ & (1-a)\lambda_2 + & (1-a^2)\lambda_3 & = 0 \\ & & (1-a)^2\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + & a\lambda_2 + & a^2\lambda_3 & = 0 \\ & (1-a)\lambda_2 + & 2a(1-a)\lambda_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 + & \lambda_2 + & \lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 + & (1+a)\lambda_3 & = 0 \\ & & \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + & a\lambda_2 + & a^2\lambda_3 & = 0 \\ & (1-a)\lambda_2 + & 2a(1-a)\lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \longleftarrow \frac{1}{1-a} L_2 \\ L_3 \longleftarrow \frac{1}{(1-a)^2} L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \lambda_1 & & & = 0 \\ & \lambda_2 & & = 0 \\ & & \lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1 + & a\lambda_2 + & a^2\lambda_3 & = 0 \\ & (1-a)\lambda_2 + & 2a(1-a)\lambda_3 & = 0 \end{array} \right. \qquad \textit{(par remontées successives)}$$

$$\iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Donc la famille $\mathcal{F} = (I, M_a, M_a^2)$ est libre. Ainsi, la famille $\mathcal{F}$:

× est libre

× engendre E par définition

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{F} \text{ est une base de } E \text{ et } \dim(E) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3.}$$

□

b) On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $J\,K^2$ puis en déduire $(M_a - I)\,(M_a - aI)^2$.

Démonstration. On a :

- $K^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- donc $JK^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De plus, on remarque que

- $M_a = K - aJ$
- $K - I = J$

d'où

- $M_a - I = K - aJ - I = J - aJ = (1-a)J$
- $M_a - aI = K - aJ - aI = K - a(I + J) = K - aK = (1-a)K$

et finalement :

$$\boxed{(M_a - I)\,(M_a - aI)^2 = (1-a)J\,\big((1-a)K\big)^2 = (1-a)^3 JK^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}.}$$

□

c) En déduire que M_a^3 appartient à E.

Démonstration. D'une part :

$$\begin{aligned} (M_a - I)(M_a - aI)^2 &= (M_a - I)(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I) && \textit{(car } M_a I = I M_a = M_a\textit{)} \\ &= M_a^3 - 2aM_a^2 + a^2 M_a - M_a^2 + 2aM_a - a^2 I \\ &= M_a^3 - (2a+1)M_a^2 + a(a+2)M_a - a^2 I \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} & (M_a - I)\,(M_a - aI)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} \quad & M_a^3 - (2a+1)M_a^2 + a(a+2)M_a - a^2 I = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \\ \text{donc} \quad & M_a^3 = (2a+1)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I \\ \text{donc} \quad & \boxed{M_a^3 \in \mathrm{Vect}\left(I, M_a, M_a^2\right) = E} \end{aligned}$$

□

4. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$M_a^n \; = \; u_n\,M_a^2 + v_n\,M_a + w_n\,I$$

On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0 et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

Démonstration. • Commençons par montrer l'unicité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe un triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$M_a^n \;=\; u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I$$

La famille (I, M_a, M_a^2) est libre donc toute décomposition sous forme de combinaison linéaire des éléments de cette famille est unique. D'où l'unicité du triplet de réels (u_n, v_n, w_n).

• Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$
où $P(n)$: « il existe un triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que $M_a^n \;=\; u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I$ »

Initialisation :
On remarque que $M_a^0 = I = 0M_a^2 + 0M_a + 1I$.
On pose $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et $w_0 = 1$. D'où $P(0)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, il existe un triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$M_a^n \;=\; u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
M_a^{n+1} &= M_a M_a^n \\
&= M_a(u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I) \\
&= u_n M_a^3 + v_n M_a^2 + w_n M_a \\
&= u_n((2a+1)M_a^2 - a(a+2)M_a + a^2 I) + v_n M_a^2 + w_n M_a \qquad \textit{(cf qu. 3.c)} \\
&= ((2a+1)u_n + v_n)\, M_a^2 + (w_n - a(a+2)u_n)\, M_a + a^2 u_n I
\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $u_{n+1} = (2a+1)u_n + v_n$, $v_{n+1} = w_n - a(a+2)u_n$ et $w_{n+1} = a^2 u_n$, on obtient $P(n+1)$.
Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que $M_a^n \;=\; u_n\, M_a^2 + v_n\, M_a + w_n\, I$. De plus, les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies via les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases} \qquad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = (2a+1)u_n + v_n \\ v_{n+1} = w_n - a(a+2)u_n \\ w_{n+1} = a^2 u_n \end{cases}$$

□

b) En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script **Python** qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle « for ».

```
n = input('entrez une valeur pour n : ')
a = input('entrez une valeur pour a : ')
u = 0
v = 0
w = 1
for k in range(n):
    u = (2 * a + 1) * u + v
    v = -a * (a + 2) * u + w
    w = (a**2) * u
print(w, v, u)
```

Démonstration. Au premier tour de boucle (lorsque k prend la valeur 0), les variables `u`, `v` et `w` contiennent respectivement les valeurs u_0, v_0 et w_0.

A la ligne 7, le script met à jour la variable `u`. A la fin de la ligne 7, la variable `u` contient la valeur u_1.

Ainsi, la ligne 8 ne permet pas de mettre à jour la variable `v` correctement. Elle devrait mettre à jour la variable `v` pour qu'elle contienne en fin de ligne 8 la valeur v_1, mais la formule utilisée est

$$v_1 = w_0 - a(a+2)u_1$$

au lieu d'être

$$v_1 = w_0 - a(a+2)u_0$$

□

c) Modifier la boucle de ce script en conséquence.

Démonstration. On utilise une variable auxiliaire qui stocke la valeur de `u` pour être réutilisée à la ligne 8 et à la ligne 9.

```
1  n = input('entrez une valeur pour n : ')
2  a = input('entrez une valeur pour a : ')
3  u = 0
4  v = 0
5  w = 1
6  for k in range(n):
7      aux = u
8      u = (2 * a + 1) * u + v
9      v = -a * (a + 2) * aux + w
10     w = (a**2) * aux
11 print(w, v, u)
```

□

5. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)\,u_{n+2} - a\,(a+2)\,u_{n+1} + a^2\,u_n$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= (2a+1)u_{n+2} + v_{n+2} \\ &= (2a+1)u_{n+2} + w_{n+1} - a(a+2)u_{n+1} \\ &= (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n \end{aligned}$$

□

On **admet** que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme :

$$u_n \;=\; \frac{(n-1)\,a^n - n\,a^{n+1} + 1}{(a-1)^2}$$

6. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A. Il en résulte (et on admet ce résultat) :

$$\lim_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim_{n\to+\infty} w_n\right) I$$

a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

Démonstration. • Tout d'abord, $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ car $a \in]0,1[$.

- Par croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} (n-1)a^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} na^{n+1} = 0$
- On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{(a-1)^2}$
- De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - (2a+1)u_n$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{(a-1)^2} - (2a+1)\frac{1}{(a-1)^2} = -\frac{2a}{(a-1)^2}$$

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = a^2 u_{n-1}$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} w_n = a^2\frac{1}{(a-1)^2} = \frac{a^2}{(a-1)^2}$$

□

b) En déduire la limite L_a lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. D'après l'énoncé :

$$\begin{aligned} L_a &= \lim_{n\to+\infty} M_a^n \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}M_a^2 - \frac{2a}{(a-1)^2}M_a + \frac{a^2}{(a-1)^2}I \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}\left(M_a^2 - 2aM_a + a^2 I\right) \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}(M_a - aI)^2 \\ &= \frac{1}{(a-1)^2}((1-a)K)^2 \\ &= K^2 \end{aligned}$$

□

c) Vérifier : $L_a^2 = L_a$.

Démonstration. $L_a^2 = (K^2)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K^2 = L_a$. □

7. `(CUBES UNIQUEMENT)` On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est M_a.

a) Démontrer : $\forall x \in \operatorname{Ker}(f_a - \mathrm{id})$, $\varphi_a(x) = x$.

Démonstration. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f_a - \mathrm{id})$. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Par isomorphisme de représentation, on a $(f_a - \mathrm{id})(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $(M_a - I)X = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc

$X \in E_1(M_a)$. Or $E_1(M_a) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X = \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
L_a X &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix}\\
&= X
\end{aligned}$$

donc, par isomorphisme de représentation : $\varphi_a(x) = x$. □

b) Démontrer : $\forall x \in \text{Im}\,(f_a - \text{id})$, $\varphi_a(x) = 0$.

Démonstration. Soit $x \in \text{Im}\,(f_a - \text{id})$. Il existe un vecteur $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = (f_a - \text{id})(u)$.

Notons $U = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ et $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Par isomorphisme de représentation, on a :

$$\begin{aligned}
X &= (M_a - I)U\\
&= (1-a)JU\\
&= (1-a)\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}\\
&= (1-a)\begin{pmatrix}0\\\alpha-\beta\\\alpha-\gamma\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
L_a X &= (1-a)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\\alpha-\beta\\\alpha-\gamma\end{pmatrix}\\
&= (1-a)\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&= 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}
\end{aligned}$$

donc, par isomorphisme de représentation : $\varphi_a(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$. □

Exercice 2 (Inspiré de ISC 1999)

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ et la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 \geqslant 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction f (on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f)

1. Déterminer le domaine de définition de f puis les limites de f aux bords de ce domaine.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$ est bien défini si et seulement si $1 + x \geqslant 0$. On en déduit que le domaine de définition de f est :

$$\boxed{D_f = [-1, +\infty[}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+x}{2} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ par composition des limites. □

2. (CUBES UNIQUEMENT) Déterminer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.

Démonstration. D'après le cours :

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

On en déduit que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}x - \frac{1}{8\sqrt{2}}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

□

3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$, calculer sa dérivée puis expliciter l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

Démonstration. La fonction f est de la forme $f = f_1 \circ f_2$ où
- $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$
- $f_2 : x \mapsto \frac{1+x}{2}$
  - × est dérivable sur $]-1, +\infty[$ car polynomiale
  - × et vérifie $f_2(]-1, +\infty[) \subset]0, +\infty[$

Ainsi, la fonction f est dérivable sur $]-1, +\infty[$.
Soit $x \in]-1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} \end{aligned}$$

La fonction f est bien dérivable en 0 et sa tangente en 0 a pour équation :

$$\begin{aligned} y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{2}}}x + \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

□

4. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Démonstration. Soit $x > -1$. D'après la question 3, on a $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1+x}{2}}} > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $]-1, +\infty[$.

x	-1		$+\infty$
Signe de $f_1'(x)$	$\Vert$	$+$	
Variations de f_1	0	$\nearrow$	$+\infty$

$\square$

5. Résoudre l'équation $f(x) = x$ puis l'inéquation $f(x) > x$.

Démonstration.

- Soit $x \in [-1, +\infty[$. On remarque que $f(x) \geqslant 0$. On en déduit que si $x < 0$ alors $f(x) \neq x$.
Résolvons maintenant l'équation sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \sqrt{\frac{1+x}{2}} = x \\ &\iff \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)^2 = x^2 \qquad \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est injective sur } \mathbb{R}^+\textit{)} \\ &\iff \frac{1+x}{2} = x^2 \\ &\iff 1 + x = 2x^2 \\ &\iff 2x^2 - x - 1 = 0 \end{aligned}$$

On introduit la fonction (polynomiale de degré 2) $g : x \mapsto 2x^2 - x - 1$.
$\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9$ donc g possède deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{1+3}{4} = 1$$

Une seule d'entre elles est dans $\mathbb{R}^+$ (il s'agit de x_2).

$\boxed{\text{On en déduit que 1 est l'unique solution de l'équation } f(x) = x \text{ sur } [-1, +\infty[}$

- Soit $x \in [-1, +\infty[$. On utilise encore le fait que $f(x) \geqslant 0$. On en déduit que si $x < 0$ alors $f(x) > x$.
Résolvons maintenant l'inéquation sur $\mathbb{R}^+$.

$$\begin{aligned} f(x) > x &\iff \sqrt{\frac{1+x}{2}} > x \\ &\iff \left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)^2 > x^2 \qquad \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+\textit{)} \\ &\iff \frac{1+x}{2} > x^2 \\ &\iff 1 + x > 2x^2 \\ &\iff g(x) < 0 \end{aligned}$$

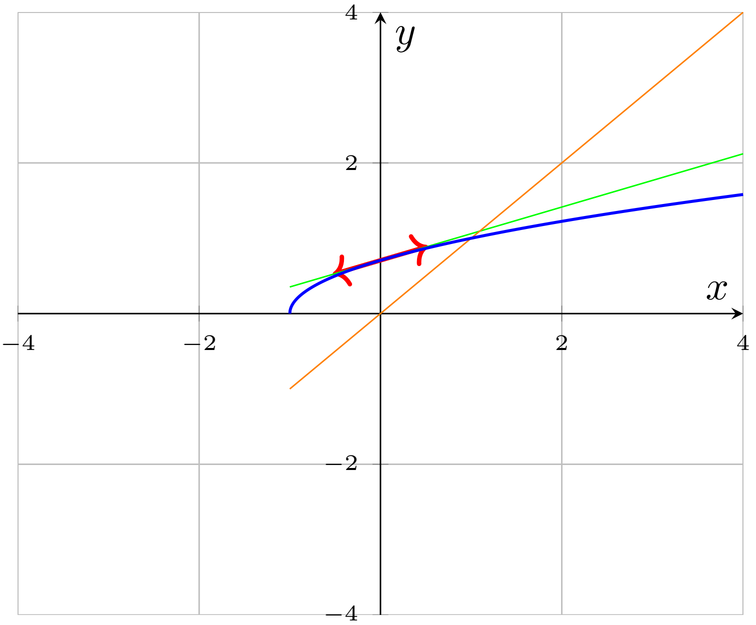
Le coefficient dominant du trinôme du second degré $2X^2 - X - 1$ est positif donc g est négative entre ses deux racines.

$$\boxed{\text{On en déduit que } f(x) > x \text{ si et seulement si } x \in [-1, 1[.}$$

□

6. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$.

Démonstration. On trace les éléments remarquables de la courbe.



□

Partie B : Étude de la suite (u_n) dans le cas où $u_0 = 0$

7. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$
où $P(n)$: « u_n est bien défini et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ »
Initialisation : $u_0 = 0$ par définition donc u_0 est bien défini et on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. D'où $P(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Or, f est bien définie sur $[0, 1]$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini également. De plus, f est croissante sur $[0, 1]$ donc $\frac{1}{\sqrt{2}} = f(0) \leqslant u_{n+1} \leqslant f(1) = 1$. D'où $P(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } 0 \leqslant u_n \leqslant 1.}$$

□

8. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$
où $P(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ »
Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant 0$. D'où $P(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, on a $u_n \leqslant u_{n+1}$. Or, f est croissante sur $[0,1]$ donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, *i.e.* $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$. D'où $P(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}.}$$

□

9. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Démonstration. D'après les deux questions précédentes, la suite (u_n) est

- croissante
- majorée par 1

On en déduit par théorème de convergence monotone que la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \leqslant 1$.

De plus, $u_0 = 0$ donc, par croissance de (u_n), pour tout entier naturel n : $u_n \geqslant 0$. Par passage à la limite : $\ell \geqslant 0$. On en déduit que f est continue en ℓ. D'après le théorème du point fixe : $\ell = f(\ell)$.

$$\boxed{\text{D'après la question 5, on en déduit que : } \ell = 1.}$$

□

10. Écrire une fonction **Python**, nommée `SuiteU`, qui prend en paramètre un entier `n` et renvoie $u_{\texttt{n}}$.

Démonstration.

```python
def SuiteU(n):
    u = 0
    for k in range(n) :
        u = np.sqrt((1+u)/2)
    return u
```

□

11. Écrire une fonction **Python**, nommée `PremierEntier`, qui prend en paramètre un réel `eps` strictement positif et renvoie le premier entier n vérifiant $1 - \texttt{eps} < u_n \leqslant 1$.

Démonstration.

```python
def PremierEntier(eps):
    n = 0
    while SuiteU(n) <= 1 - eps :
        n = n+1
    return n
```

Commentaire

Il n'y a pas besoin de tester si $u_n \leqslant 1$, c'est toujours le cas.

□

Partie C : Étude de la suite (u_n) dans le cas où $u_0 > 1$

12. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$
où $P(n)$: « u_n est bien défini et $1 \leqslant u_n$ »
Initialisation : $u_0 \in]1, +\infty[$ par définition donc u_0 est bien défini et on a bien $1 \leqslant u_0$. D'où $P(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, on a $1 \leqslant u_n$. Or, f est bien définie sur $[1, +\infty[$, donc $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini également. De plus, f est croissante sur $[1, +\infty[$ donc $1 = f(1) \leqslant u_{n+1}$. D'où $P(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ est bien défini et } 1 \leqslant u_n.}$$

□

13. Montrer que la suite (u_n) est monotone.

Démonstration. D'après la question 5, pour tout $x \geqslant 1$, on a $f(x) \leqslant x$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $x = u_n$, on a $x \geqslant 1$ d'après la question précédente, d'où $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$$

□

14. Étudier la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Démonstration. D'après les deux questions précédentes, la suite (u_n) est
- décroissante
- minorée par 1

On en déduit par théorème de convergence monotone que la suite (u_n) est convergente et sa limite ℓ vérifie $\ell \geqslant 1$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et
- $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ (suite extraite)
- $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell)$ par continuité de f en ℓ

Par unicité de la limite, on a donc $\ell = f(\ell)$. D'après la question 5, il vient que

$$\boxed{\ell = 1}$$

□

Dans **toute la suite de l'exercice** on suppose que $u_0 > 1$.

Partie D : Étude de fonctions auxiliaires

On définit les fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$ par

$$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \text{et} \qquad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

15. Exprimer les dérivées des fonctions ch et sh en fonction de ch et sh.
Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) > 0$.
Calculer $\text{sh}(0)$ et déterminer le signe de $\text{sh}(x)$ en fonction de x.

Démonstration.
- Les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme somme et composées de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ &= \mathrm{sh}(x)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\mathrm{sh}'(x) &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ &= \mathrm{ch}(x)\end{aligned}$$

- De plus, $\mathrm{e}^x > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$ donc $\mathrm{ch}(x) > 0$.
- $\mathrm{sh}(0) = \frac{1-1}{2} = 0$. D'après les deux points précédents, la fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $\mathrm{sh}(x) > 0$ et pour tout $x < 0$, on a $\mathrm{sh}(x) < 0$.

$\square$

16. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \geq 0$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$.

Démonstration. La question précédente permet de tracer le tableau de variations de la fonction ch :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, la fonction ch est

- strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- continue sur $[0, +\infty[$

Donc la fonction ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ dans $\mathrm{ch}([0, +\infty[) = [1, +\infty[$. Or $u_0 \in [1, +\infty[$ par hypothèse. On en déduit qu'il existe un unique réel $\alpha \in [0, +\infty[$ tel que $\mathrm{ch}(\alpha) = u_0$. $\square$

17. On considère le programme **Python** suivant

```
def ch(x):
    return (np.exp(x)+np.exp(-x))/2

u0=3/2
a=0
b=2
c=(a+b)/2
while b-a > 10**(-3):
    if (ch(a)-u0)*(ch(c)-u0) < 0:
        b=c
    else:
        a=c
    c=(a+b)/2
print(c)
```

a. Que fait ce programme ? Comment s'appelle ce type de programme ?

Démonstration. Ce programme donne une approximation de α à 10^{-3} près lorsque $u_0 = \frac{3}{2}$. On appelle ce type de programme une « recherche de solution par dichotomie ». $\square$

b. Pourquoi a-t-on pris $b = 2$?

Démonstration. On sait que $\alpha > 0$ car $u_0 > 1$. De plus, dans le cas où $u_0 = \frac{3}{2}$, on a

$$\mathrm{ch}(2) = \frac{\mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^{-2}}{2} > \frac{\mathrm{e}^2}{2} > \frac{3}{2} = \mathrm{ch}(\alpha)$$

donc, par stricte croissance de ch sur $[0, +\infty[$, on a $\alpha < 2$. □

18. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = \mathrm{ch}(x)$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2\left(\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 &= 2\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 2\frac{\mathrm{e}^x + 2 + \mathrm{e}^{-x}}{4} - 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^x + 2 + \mathrm{e}^{-x}}{2} - 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} + 1 - 1 \\ &= \mathrm{ch}(x) \end{aligned}$$

□

19. En déduire que, pour tout entier n,

$$u_n = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$
où $P(n)$: « $u_n = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$ »
Initialisation : $\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^0}\right) = \mathrm{ch}(\alpha) = u_0$ d'après la question 16. D'où $P(0)$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= f(u_n) \\ &= \sqrt{\frac{u_n + 1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) + 1}{2}} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \sqrt{\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\frac{\alpha}{2^n}}{2}\right)\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right)\right)^2} \\ &= \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^{n+1}}\right) && \textit{car } \mathrm{ch}(x) > 0 \textit{ pour tout } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'où $P(n+1)$.

$$\boxed{\text{Par principe de récurrence : pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = \mathrm{ch}\left(\tfrac{\alpha}{2^n}\right).}$$

□

20. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}(x) - 1 = 2\left(\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 2\left(\mathrm{sh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + 1 &= 2\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x} - 2 + \mathrm{e}^{-x}}{2} + 1 \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} - 1 + 1 \\ &= \mathrm{ch}(x) \end{aligned}$$

□

21. Calculer $\mathrm{sh}'(0)$.

Démonstration. $\mathrm{sh}'(0) = \mathrm{ch}(0) = 1$ d'après le tableau de variations de la question 16. □

22. En déduire les équivalences suivantes

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \quad \text{et} \quad \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

Démonstration. Soit $x \neq 0$. On a

$$\frac{\mathrm{sh}(x) - \mathrm{sh}(0)}{x - 0} = \frac{\mathrm{sh}(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \mathrm{sh}'(0) = 1$$

en reconnaissant le taux d'accroissement en 0 de la fonction sh.

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x.}$$

D'après la question ***20*** :

$$\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}.}$$

Commentaire

On pouvait également faire un calcul de développement limité.
Ecrivons le $DL_2(0)$ de la fonction ch :

$$\begin{aligned} \mathrm{ch}(x) &= \mathrm{ch}(0) + \mathrm{ch}'(0)x + \frac{\mathrm{ch}''(0)}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{ch}(x) - 1 = \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

et donc

$$\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$$

□

23. En déduire un équivalent de $(u_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 19, on a $u_n = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)$. D'où, en utilisant le fait que $\frac{\alpha}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$:

$$u_n - 1 = \mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{2^n}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{2^{2n+1}}$$

□

Exercice 3 (inspiré de Ecricome 2019 voie S)

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On effectue une succession infinie de tirages d'une boule dans cette urne. Après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne, et on rajoute dans l'urne une boule de couleur opposée à celle qui vient d'être tirée.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne juste après le k^{e} tirage. En particulier, on a $X_0 = 1$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note :

B_i : « on obtient une boule blanche au i^{e} tirage »
N_i : « on obtient une boule noire au i^{e} tirage »

1. Compléter la fonction **Python** ci-dessous afin qu'elle simule la variable aléatoire X_n.

```
def Simu_X(n):
    nB,nN = 1,1
    for k in range(n) :
        if  rd.random() < nB/(nN+nB) :
            nN = nN + 1
        else :
             nB = nB + 1
    return  nB
```

2. Déterminer la loi de X_1. Donner son espérance et sa variance. (*On pourra utiliser les évènements B_1 et N_1 pour rédiger la réponse.*)

Démonstration. Si on tire une boule blanche au premier tirage, alors on la remet dans l'urne et on rajoute une boule noire supplémentaire. Dans ce cas, X_1 prend la valeur 1. Si on tire une boule noire au premier tirage, alors on la remet dans l'urne et on rajoute une boule blanche supplémentaire. Dans ce cas, X_1 prend la valeur 2.
Il n'y a pas d'autres possibilités donc $\boxed{X_1(\Omega) = \{1, 2\}}$.

$$\begin{aligned}[X_1 = 1] \text{ est réalisé} &\iff \text{Après le premier tirage, il y a une boule blanche dans l'urne}\\ &\iff \text{On a tiré une boule blanche au premier tirage}\\ &\iff B_1 \text{ est réalisé}\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_1 = 1]) &= \mathbb{P}(B_1)\\ &= \frac{1}{2} && \textit{(par équiprobabilité)}\end{aligned}$$

La famille $([X_1 = 1], [X_1 = 2])$ est un système complet d'événements (associé à X_1)
donc $\mathbb{P}([X_1 = 1]) + \mathbb{P}([X_1 = 2]) = 1$
donc $\boxed{\mathbb{P}([X_1 = 2]) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}}$
La v.a.r. X_1 admet une espérance et une variance en tant que v.a.r. finie.

$$\boxed{\mathbb{E}(X_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}}$$

$$\mathbb{E}(X_1^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

donc, d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\boxed{\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - (\mathbb{E}(X_1))^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}}$$

On pouvait aussi remarquer que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, 2 \rrbracket)$. □

3. ***a.*** Justifier soigneusement que la loi de X_2 est donnée par :

$$\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}$$

Démonstration. • Il y a au départ une boule blanche dans l'urne et ce nombre ne peut faire qu'augmenter au cours de l'expérience.

- Si l'on tire deux boules blanches aux lancers numéros 1 et 2, alors X_2 prend la valeur 1.
- Si l'on tire une boule blanche puis une boule noire, alors X_2 prend la valeur 2.
- Si l'on tire deux boules noires, alors X_2 prend la valeur 3.
- On ne peut pas rajouter plus de deux boules blanches lors des deux premiers tirages (on rajoute soit 0 soit 1 boule blanche à chaque tirage).

On en déduit que $\boxed{X_2(\Omega) = \{1, 2, 3\}}$.

$$\begin{aligned}
[X_2 = 1] \text{ est réalisé } &\Longleftrightarrow \text{Après le deuxième tirage, il y a une boule blanche dans l'urne} \\
&\Longleftrightarrow \text{On n'a pas rajouté de boules blanches lors des deux premiers tirages} \\
&\Longleftrightarrow \text{On a tiré deux boules blanches lors des deux premiers tirages} \\
&\Longleftrightarrow B_1 \cap B_2 \text{ est réalisé}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_2 = 1]) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \\
&= \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) \qquad \textit{(car } \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{2} \neq 0\textit{)}
\end{aligned}$$

Si l'événement B_1 est réalisé, alors c'est que l'on a obtenu une boule blanche au premier tirage. Dans ce cas, le deuxième tirage s'effectue dans une urne contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
Par équiprobabilité : $\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{3}$.
D'où $\boxed{\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{6}}$.
Les rôles des couleurs noires et blanches sont complètement symétriques dans l'expérience, donc les événements $B_1 \cap B_2$ et $N_1 \cap N_2$ (*i.e.* les événements $[X_2 = 1]$ et $[X_2 = 3]$) ont la même probabilité d'être réalisés.

D'où $\boxed{\mathbb{P}([X_2 = 3]) = \frac{1}{6}}$.
La famille $([X_2 = 1]), [X_2 = 2]\,, [X_2 = 3])$ est un système complet d'événements, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_2 = 2]) &= 1 - \mathbb{P}([X_2 = 1]) - \mathbb{P}([X_2 = 3]) \\ &= 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \\ &= \boxed{\frac{2}{3}}\end{aligned}$$

$\square$

b. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_2)$.

Démonstration. La v.a.r. X_2 est finie donc admet une espérance.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_2) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{8}{6} + \frac{3}{6} \\ &= \boxed{2}\end{aligned}$$

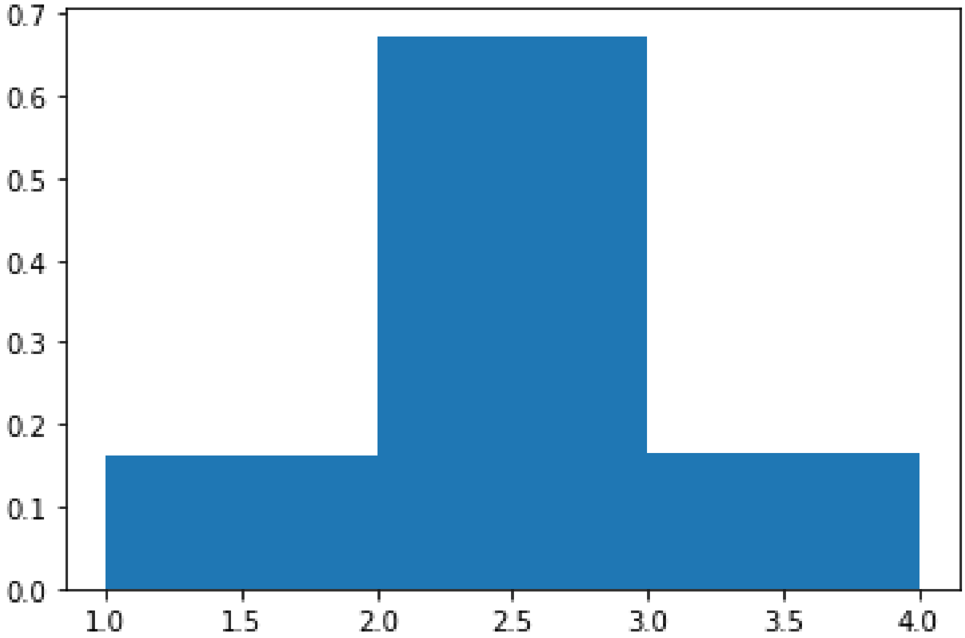
$\square$

c. On rappelle qu'après avoir chargé la bibliothèque `matplotlib.pyplot` sous l'alias `plt`, on a accès à la fonction `plt.hist` qui trace l'histogramme d'une liste ou d'un tableau donné en argument. Représenter précisément, en justifiant la réponse, la figure que l'on peut s'attendre à ce que **Python** affiche à l'exécution des instructions suivantes

```
L = []
for k in range(10000):
    L.append(Simu_X(2))
plt.hist(L, range(1,5), density = True)
plt.show()
```

Démonstration. Le programme donné permet de représenter l'histogramme des fréquences (avec l'option `density = True`) des valeurs observées lors de la simulation d'un échantillon de taille 10000 de X_2. On peut alors s'attendre[1] à voir des bâtons dont les hauteurs seront proches des valeurs théoriques obtenues ci-dessus. On attendait donc la figure ci-dessous :

(1). Ceci prendra davantage de sens au cours du chapitre « Convergence et approximation »



□

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Préciser l'ensemble $X_k(\Omega)$ des valeurs que peut prendre X_k.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. A chaque tirage, le nombre de boules blanches augmente de 0 ou 1. Ainsi, après k tirages, on a rajouté entre 0 et k boules blanches.
D'où $\boxed{X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]}$. □

5. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$. En distinguant trois cas, déterminer

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}\left([X_{k+1} = i]\right).$$

Démonstration. Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et $j \in X_k(\Omega)$.
Si l'événement $[X_k = j]$ est réalisé, alors c'est que l'urne contient j boules blanches juste après le k^{e} tirage (et donc juste avant le $(k+1)^{\text{e}}$ tirage). Précisons qu'à ce moment, l'urne contient $k+2$ boules au total (on rajoute 1 boule à chaque tirage et on a initialement 2 boules dans l'urne). Dans ce cas, il y a deux possibilités :

- Soit on obtient une boule blanche au $(k+1)^{\text{e}}$ tirage et donc l'urne contient j boules blanches juste après le $(k+1)^{\text{e}}$ tirage (*i.e.* X_{k+1} prends la valeur j).
- Soit on obtient une boule noire au $(k+1)^{\text{e}}$ tirage et donc l'urne contient $j+1$ boules blanches juste après le $(k+1)^{\text{e}}$ tirage (*i.e.* X_{k+1} prends la valeur $j+1$).

Ainsi, il y a trois cas selon la valeur de i :
Premier cas : $i = j$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_k=j]}\left([X_{k+1} = i]\right) &= \mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1} = j]) \\
&= \mathbb{P}_{[X_k=j]}(B_{k+1}) \\
&= \frac{j}{k+2} && \textit{(par équiprobabilité)}
\end{aligned}$$

Deuxième cas : $i = j+1$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{[X_k=j]}\left([X_{k+1}=i]\right) &= \mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1}=j+1]) \\
&= \mathbb{P}_{[X_k=j]}(N_{k+1}) \\
&= \frac{k+2-j}{k+2} && \textit{(par équiprobabilité)}
\end{aligned}$$

Troisième cas : $i \in \mathbb{N}^* \setminus \{j, j+1\}$.

$$\mathbb{P}_{[X_k=j]}\left([X_{k+1}=i]\right) = 0$$

□

6. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\left([X_{k+1}=i]\right) = \frac{i}{k+2}\ \mathbb{P}\left([X_k=i]\right) + \frac{3+k-i}{k+2}\ \mathbb{P}\left([X_k=i-1]\right) \qquad (*)$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $i \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4, $X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$. Ainsi, la famille $([X_k=j])_{j\in[\![1,k+1]\!]}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{k+1}=i]) &= \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}([X_k=j]\cap[X_{k+1}=i]) \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{P}([X_k=j])\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1}=i]) && \textit{(pour tout } j \in [\![1,k+1]\!], \ \mathbb{P}([X_k=j]) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{j=i-1}^{i} \mathbb{P}([X_k=j])\mathbb{P}_{[X_k=j]}([X_{k+1}=i]) && \textit{(tous les autres termes sont nuls cf question 5)} \\
&= \mathbb{P}([X_k=i-1])\mathbb{P}_{[X_k=i-1]}([X_{k+1}=i]) \\
&\quad + \mathbb{P}([X_k=i])\mathbb{P}_{[X_k=i]}([X_{k+1}=i]) \\
&= \mathbb{P}([X_k=i-1])\frac{k+2-(i-1)}{k+2} + \mathbb{P}([X_k=i])\frac{i}{k+2} \\
&= \mathbb{P}([X_k=i-1])\frac{k+3-i}{k+2} + \mathbb{P}([X_k=i])\frac{i}{k+2}
\end{aligned}$$

□

7. À l'aide de la formule (*) déterminer la loi de X_3.

Démonstration. D'après la question 4, on a $X_3(\Omega) = [\![1,4]\!]$ et $X_2(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
D'après la formule (*) :

- D'après la formule (*) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_3=1]) &= \frac{1}{4}\ \mathbb{P}\left([X_2=1]\right) + \frac{4}{4}\ \mathbb{P}\left([X_k=0]\right) \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{P}([X_2=1]) + 0 \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} && \textit{(cf question 3.a)} \\
&= \frac{1}{24}
\end{aligned}$$

- D'après la formule (*) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_3 = 2]) &= \frac{2}{4}\mathbb{P}([X_2 = 2]) + \frac{3}{4}\mathbb{P}([X_2 = 1]) \\ &= \frac{2}{4} \times \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} && \textit{(cf question 3.a)} \\ &= \frac{11}{24}\end{aligned}$$

- Par symétrie des rôles des couleurs :

$$\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{11}{24}$$

- Par symétrie des rôles des couleurs :

$$\mathbb{P}([X_3 = 4]) = \mathbb{P}([X_3 = 1]) = \frac{1}{24}$$

On rassemble ces résultats dans un tableau :

$i \in X_3(\Omega)$	1	2	3	4
$\mathbb{P}([X = i])$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{24}$

□

8. a. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left([X_k = 1]\right) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k)$
où $P(k)$: « $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \dfrac{1}{(k+1)!}$ ».
Initialisation :
D'une part, $\mathbb{P}([X_0 = 1]) = 1$ car $X_0 = 1$.
D'autre part, $\dfrac{1}{(0+1)!} = \dfrac{1}{1} = 1$.
D'où $P(0)$.
Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.
D'après la formule (*) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_{k+1} = 1]) &= \frac{1}{k+2}\mathbb{P}([X_k = 1]) + \frac{3+k-1}{k+2}\mathbb{P}([X_k = 0]) \\ &= \frac{1}{k+2}\mathbb{P}([X_k = 1]) + 0 \\ &= \frac{1}{k+2}\frac{1}{(k+1)!} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{(k+2)!}\end{aligned}$$

D'où $P(k+1)$.
Par principe de récurrence : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_k = 1]) = \dfrac{1}{(k+1)!}$. □

b. Montrer de même que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}\left([X_k = k+1]\right) = \frac{1}{(k+1)!}.$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k)$
où $P(k)$: « $\mathbb{P}([X_k = k+1]) = \dfrac{1}{(k+1)!}$ ».
<u>Initialisation</u> :
D'une part, $\mathbb{P}([X_0 = 1]) = 1$ car $X_0 = 1$.
D'autre part, $\dfrac{1}{(0+1)!} = \dfrac{1}{1} = 1$.
D'où $P(0)$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.
D'après la formule (*) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_{k+1} = k+2]) &= \frac{k+2}{k+2}\mathbb{P}([X_k = k+2]) + \frac{3+k-(k+2)}{k+2}\mathbb{P}([X_k = k+1]) \\
&= 0 + \frac{1}{k+2}\mathbb{P}([X_k = k+1]) \\
&= \frac{1}{k+2}\,\frac{1}{(k+1)!} && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{(k+2)!}
\end{aligned}$$

D'où $P(k+1)$.
Par principe de récurrence : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X_k = k+1]) = \dfrac{1}{(k+1)!}$. □

c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $a_k = (k+1)! \times \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right)$.
Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k et de k.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= ((k+1)+1)! \times \mathbb{P}([X_{k+1} = 2]) \\
&= (k+2)!\left(\frac{2}{k+2}\mathbb{P}([X_k = 2]) + \frac{3+k-2}{k+2}\mathbb{P}([X_k = 1])\right) && \textit{(cf formule (*))} \\
&= 2(k+1)! \times \mathbb{P}([X_k = 2]) + (k+2)!\frac{k+1}{k+2}\,\frac{1}{(k+1)!} && \textit{(cf qu. 8.a)} \\
&= 2a_k + k + 1
\end{aligned}$$

□

d. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose : $b_k = a_k + k + 2$. Montrer que la suite (b_k) est géométrique. En déduire alors que :

$$\forall k \in\ \mathbb{N},\ \mathbb{P}\left([X_k = 2]\right) = \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!}$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+1} + (k+1) + 2 \\ &= (2a_k + k + 1) + k + 3 && \textit{(cf qu. 8.c)} \\ &= 2a_k + 2k + 4 \\ &= 2(a_k + k + 2) \\ &= 2b_k \end{aligned}$$

On en déduit que la suite (b_k) est géométrique de raison 2. D'où :

$$\begin{aligned} b_k &= b_0 2^k \\ &= (a_0 + 2)2^k \\ &= (\mathbb{P}([X_0 = 2]) + 2)2^k \\ &= (0+2)2^k \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

Et finalement :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_k = 2]) &= \frac{a_k}{(k+1)!} \\ &= \frac{b_k - k - 2}{(k+1)!} \\ &= \frac{2^{k+1} - k - 2}{(k+1)!} \end{aligned}$$

□

9. a. À l'aide de la formule (*), montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_{k+1}\right) = \frac{k+1}{k+2}\mathbb{E}\left(X_k\right) + 1$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Les v.a.r. X_k et X_{k+1} sont finies donc admettent une espérance. De plus, le théorème de transfert pourra être utilisé de manière licite.
On sait que $X_{k+1}(\Omega) = [\![1, k+2]\!]$ et $X_k(\Omega) = [\![1, k+1]\!]$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+2} i\mathbb{P}([X_{k+1} = i]) \\ &= \sum_{i=1}^{k+2} i\left(\frac{i}{k+2}\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{3+k-i}{k+2}\mathbb{P}([X_k = i-1])\right) \\ &= \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i^2\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i\mathbb{P}([X_k = i-1]) - \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+2} i^2\mathbb{P}([X_k = i-1]) \\ &= \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+1} i^2\mathbb{P}([X_k = i]) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1} (i+1)\mathbb{P}([X_k = i]) - \frac{1}{k+2}\sum_{i=0}^{k+1} (i+1)^2\mathbb{P}([X_k = i]) \end{aligned}$$

(par théorème de transfert :)

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{k+2}\mathbb{E}(X_k^2) + \frac{k+3}{k+2}\sum_{i=1}^{k+1} (i+1)\mathbb{P}([X_k = i]) - \frac{1}{k+2}\sum_{i=1}^{k+1} (i+1)^2\mathbb{P}([X_k = i]) \\ &= \frac{1}{k+2}\mathbb{E}(X_k^2) + \frac{k+3}{k+2}\mathbb{E}(X_k + 1) - \frac{1}{k+2}\mathbb{E}((X_k+1)^2) \end{aligned}$$

(par linéarité de l'espérance :)

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{k+2}\mathbb{E}(X_k^2) + \frac{k+3}{k+2}(\mathbb{E}(X_k)+1) - \frac{1}{k+2}(\mathbb{E}(X_k^2) + 2\mathbb{E}(X_k)+1) \\
&= \left(\frac{k+3}{k+2} - \frac{2}{k+2}\right)\mathbb{E}(X_k) + \frac{k+3}{k+2} - \frac{1}{k+2} \\
&= \frac{k+1}{k+2}\mathbb{E}(X_k) + 1
\end{aligned}$$

□

b. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}\left(X_k\right) = \frac{k+2}{2}$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(k)$
où $P(k)$: « $\mathbb{E}(X_k) = \frac{k+2}{2}$ »
<u>Initialisation</u> :
D'une part, $X_0 = 1$ donc $\mathbb{E}(X_0) = 1$.
D'autre part, $\frac{0+2}{2} = 1$.
D'où $P(0)$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $P(k)$. Montrons $P(k+1)$.
D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{k+1}) &= \frac{k+1}{k+2}\mathbb{E}(X_k) + 1 \\
&= \frac{k+1}{k+2}\frac{k+2}{2} + 1 \qquad \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{k+1}{2} + 1 \\
&= \frac{k+3}{2}
\end{aligned}$$

D'où $P(k+1)$.
Par principe de récurrence, on a montré que : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_k) = \frac{k+2}{2}$. □

Commentaire

On pouvait démontrer ce dernier résultat beaucoup plus simplement. En effet, notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, Y_k la v.a.r. égale au nombre de boules noires dans l'urne juste après le k^{e} tirage. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait qu'après k tirages, il y a $k+2$ boules au total dans l'urne. Ainsi : $X_k + Y_k = k+2$. Les v.a.r. X_k et Y_k sont finies donc admettent une espérance, on en déduit par linéarité de l'espérance que :

$$\mathbb{E}(X_k) + \mathbb{E}(Y_k) = k+2$$

Or, les rôles des couleurs blanches et noires sont symétriques donc $\mathbb{E}(X_k) = \mathbb{E}(Y_k)$. D'où $2\mathbb{E}(X_k) = k+2$ et donc $\mathbb{E}(X_k) = \frac{k+2}{2}$.