
Planche HEC : probabilités générales

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours : Formule des probabilités totales.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère n urnes numérotées de 1 à n et N un entier naturel multiple de 2^n .

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la k -ième urne contient N boules dont $\frac{N}{2^k}$ boules blanches, les autres étant noires.

On tire dans l'urne 1 une boule que l'on place dans l'urne 2, puis on tire dans l'urne 2 une boule que l'on place dans l'urne 3 et ainsi de suite jusqu'à tirer dans l'urne $n - 1$ une boule que l'on place dans l'urne n , puis on tire une boule dans l'urne n .

L'expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, soit p_k la probabilité que la boule tirée dans l'urne k soit blanche.

Trouver une relation de récurrence entre p_{k+1} et p_k ($1 \leq k \leq n - 1$).

3. a) Calculer p_n en fonction de n et N .

b) Pour n fixé, calculer $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter cette limite.

4. Soit $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Calculer la probabilité conditionnelle que la n -ième boule tirée soit blanche sachant que la boule tirée dans l'urne i est blanche.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit $(A_i)_{i \in I}$ un système complet d'événements, avec I un ensemble discret (fini ou indexé par $\mathbb{N}$) et B un événement, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i \cap B)$$

Si de plus les A_i sont tous de probabilité non nulle, alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

2. Notons, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, B_k l'événement « la boule tirée dans la k^{e} urne est blanche ».

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(B_k, \overline{B_k})$, on a :

$$p_{k+1} = \mathbb{P}(B_{k+1}) = \mathbb{P}(B_k \cap B_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{B_k} \cap B_{k+1})$$

$$= \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(B_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{B_k}) \mathbb{P}_{\overline{B_k}}(B_{k+1})$$

(car $\mathbb{P}(B_k) \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{B_k}) \neq 0$ puisque il y a toujours au moins une boule blanche et une boule noire dans les urnes numérotées de 1 à $n-1$)

$$= p_k \frac{\frac{N}{2^{k+1}} + 1}{N+1} + (1-p_k) \frac{\frac{N}{2^{k+1}}}{N+1}$$

$$= \frac{1}{N+1} p_k + \frac{1}{2^{k+1}} \frac{N}{N+1}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $p_{k+1} = \frac{1}{N+1} p_k + \frac{1}{2^{k+1}} \frac{N}{N+1}$.

3. a) Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Multiplions l'égalité obtenue à la question précédente par 2^{k+1} :

$$2^{k+1} p_{k+1} = \frac{2}{N+1} 2^k p_k + \frac{N}{N+1}$$

On pose alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k = 2^k p_k$, de telle sorte que $(u_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ soit une suite (finie) arithmético-géométrique. En effet, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$u_{k+1} = a u_k + b$$

où $a = \frac{2}{N+1}$ et $b = \frac{N}{N+1}$ (a et b sont bien indépendants de k).

En appliquant la méthode usuelle de calcul, on trouve :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k = \lambda + a^{k-1} (u_1 - \lambda)$$

où $\lambda = \frac{N}{N-1}$ est la solution de l'équation de point fixe $x = ax + b$ et $u_1 = 2p_1 = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

Finalement, puisque $p_n = \frac{1}{2^n} u_n$, on obtient :

$$p_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{N}{N-1} + \left(\frac{2}{N+1} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{N}{N-1} \right) \right).$$

b) On a :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{N-1} = 1$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{N+1} \right)^{n-1} = 0 \quad (\text{car } N \geq 2^2 = 4 \text{ donc } \frac{2}{N+1} \in]-1, 1[)$$

On en déduit que : $\lim_{N \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2^n}.$

Interprétation : lorsque N est très grand, rajouter une boule blanche ou une boule noire dans l'urne numéro n ne change presque rien à la proportion de boule blanche. Ainsi, le dernier tirage devient « indifférent » à ce qu'il s'est passé auparavant et tout se passe comme si on faisait directement un tirage dans cette urne sans ajouter de boule.

Commentaire

La formule de p_n n'est pas nécessaire pour calculer cette limite. En effet, d'après la relation de récurrence, on a :

$$p_n = \frac{1}{N+1} p_{n-1} + \frac{1}{2^n} \frac{N}{N+1}$$

Or, $p_{n-1} \in [0, 1]$ (c'est la probabilité d'un événement) donc la suite $(p_{n-1})_{N \in \mathbb{N}}$ est bornée (attention, ici n est fixé). On en déduit, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N+1} p_{n-1} = 0$$

On retrouve bien que :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2^n}$$

4. Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Posons, pour tout $k \in \llbracket i, n \rrbracket$, $\tilde{p}_k = \mathbb{P}_{B_i}(B_k)$. Remarquons que $\tilde{p}_i = 1$ et $\tilde{p}_{i+1} = \frac{\frac{N}{2^{i+1}} + 1}{N+1}$.

Soit $k \in \llbracket i+1, n-1 \rrbracket$. Cherchons une relation de récurrence entre $\tilde{p}_{k+1}$ et $\tilde{p}_k$.

On applique à nouveau la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(B_k, \overline{B_k})$:

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{k+1} &= \mathbb{P}_{B_i}(B_{k+1}) = \mathbb{P}_{B_i}(B_k \cap B_{k+1}) + \mathbb{P}_{B_i}(\overline{B_k} \cap B_{k+1}) \\ &= \mathbb{P}_{B_i}(B_k) \mathbb{P}_{B_i \cap B_k}(B_{k+1}) + \mathbb{P}_{B_i}(\overline{B_k}) \mathbb{P}_{B_i \cap \overline{B_k}}(B_{k+1}) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{P}_{B_i}(B_k) \mathbb{P}_{B_k}(B_{k+1}) + \mathbb{P}_{B_i}(\overline{B_k}) \mathbb{P}_{\overline{B_k}}(B_{k+1})$$

(car connaître le résultat du tirage dans l'urne k détermine entièrement le contenu de l'urne numéro $k+1$)

$$= \tilde{p}_k \frac{\frac{N}{2^{k+1}} + 1}{N+1} + (1 - \tilde{p}_k) \frac{\frac{N}{2^{k+1}}}{N+1}$$

$$= \frac{1}{N+1} \tilde{p}_k + \frac{1}{2^{k+1}} \frac{N}{N+1}$$

On vérifie que cette formule est également valable pour $k = i$. Ainsi, la suite $(\tilde{p}_k)_{k \in \llbracket i, n \rrbracket}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite (p_k) .

On introduit donc comme précédemment la suite $(\tilde{u}_k)_{k \in \llbracket i, n \rrbracket}$ définie par :

$$\forall k \in \llbracket i, n \rrbracket, \tilde{u}_k = 2^k \tilde{p}_k$$

et on a :

$$\forall k \in \llbracket i, n \rrbracket, \tilde{u}_k = \lambda + a^{k-i}(u_i - \lambda)$$

où $\lambda = \frac{N}{N-1}$, $a = \frac{2}{N+1}$ et $u_i = 2^i \tilde{p}_i = 2^i$.

$$\text{D'où : } \tilde{p}_n = \frac{1}{2^n} \left(\frac{N}{N-1} + \left(\frac{2}{N+1} \right)^{n-i} \left(2^i - \frac{N}{N-1} \right) \right).$$

Commentaire

On pouvait raisonner sans introduire de nouvelle suite en rédigeant de la manière suivante. Supposons que l'événement B_i soit réalisé.

Alors tout se passe comme si l'expérience commence dans l'urne numéro $i+1$ qui contient $N+1$ boules dont $\frac{N}{2^{i+1}} + 1$ sont blanches.

On refait alors le même raisonnement qu'aux questions 2 et 3.a).