Planche HEC : variables aléatoires discrètes

Exercice sans préparation 1

Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule, si elle est rouge, on arrête les tirage, si elle est verte, on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge.
On note X le nombre de tirages effectués.

1. Écrire une fonction **Python** `simulX()` permettant de simuler la variable aléatoire X.

2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

3. Montrer que $\frac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.

Réponses de l'exercice sans préparation 1 :

1. On propose deux solutions :

```
def simulX():
    X = 1 # Nombre de tirages effectués
    r = 1 # Nombre de boules rouges
    while rd.random() < 1/(r+1): # Tant qu'on tire la boule verte
        X = X+1
        r = r+1
    return X
```

ou bien

```
def simulX():
    X = 0 # Nombre de tirages effectués
    r = 1 # Nombre de boules rouges
    v = 1 # Nombre de boules vertes
    while True:
        X = X+1
        if rd.random() < r/(r+v): # Si on tire une boule rouge
            return X # On arrête l'expérience
        else: # Si on tire une boule verte
            r = r+1
```

Commentaire

Dans le premier programme, on doit initialiser `X` à 1 parce que `X` n'est pas incrémenté par la boucle `while` au moment où l'on tire la première boule rouge qui marque l'arrêt de l'expérience.

2. Tout d'abord, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$R_k : \text{« On tire une boule rouge au } k^{\text{e}} \text{ tirage »}$$
$$V_k : \text{« On tire une boule verte au } k^{\text{e}} \text{ tirage »}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a

$$[X = k] = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_{k-1} \cap R_k$$

et donc, d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}([X = k]) = \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{k} \times \frac{k}{k+1} = \frac{k}{(k+1)!}$$

d'où

$$k\mathbb{P}([X = k]) = \frac{k^2}{(k+1)!} = \frac{(k+1)k - k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)k - (k+1) + 1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \\
&= 1 - \frac{1}{n!} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 1 - 1 \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 1 - \frac{1}{n!}
\end{aligned}$$

On reconnait la somme partielle d'une série exponentielle, d'où

$$\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}([X=k]) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} - 1$$

Ainsi, la série $\sum k\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument (elle est à termes positifs) donc X admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{e} - 1$$

3. D'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $\frac{1}{X}$ admet une espérance si et seulement si la série $\sum \frac{1}{k}\mathbb{P}([X=k])$ converge absolument. Cela revient à montrer la convergence ici car il s'agit d'une série à termes positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\mathbb{P}([X=k]) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - 2 \underset{n\to+\infty}{=\!\!\longrightarrow} \mathrm{e} - 2$$

Donc $\frac{1}{X}$ admet une espérance et $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \mathrm{e} - 2$.