DS3 (version A)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. ***a)*** Déterminer $(A - I)^2$.

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

3. ***a)*** `(CUBES UNIQUEMENT)` Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

b) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

4. On pose $u_1 = (f - \mathrm{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \mathrm{id}$ est égal à 1.

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

5. ***a)*** Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \left(P^{-1}NP\right)T \;=\; T\left(P^{-1}NP\right)$$

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\left(P\,(E_{1,1}{+}E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\right)$.

Exercice 2

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2\,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

2. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in \,]0, +\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$, et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Ecrire une fonction en **Python** (nommée `suiteU`) qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.

5. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

6. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Partie III : Étude d'une série

7. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(n)}$.

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

9. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

2. ***a)*** Déterminer $T_n(\Omega)$.

b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.

c) Montrer que :

$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :

$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

7. ***a)*** Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\dbinom{j-1}{k-1}$, $\dbinom{j-1}{k}$ et $\dbinom{j}{k}$.

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

8. ***a)*** Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}([T_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

10. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

11. On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` simule une v.a.r. qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$.Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la v.a.r. T_n :

```
def SimulT(n):
    S=0
    k=0
    while _________ :
        S = ______________________________
        k = _______
    return _____
```

Exercice 4

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. ***a)*** Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n + 1)\,\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n + 1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. ***a)*** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\,\mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

3. ***a)*** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

c) En déduire la loi de V.

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

5. `(CUBES UNIQUEMENT)` Que vaut $\mathrm{Cov}(U, V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X, U)$.

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0, 1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

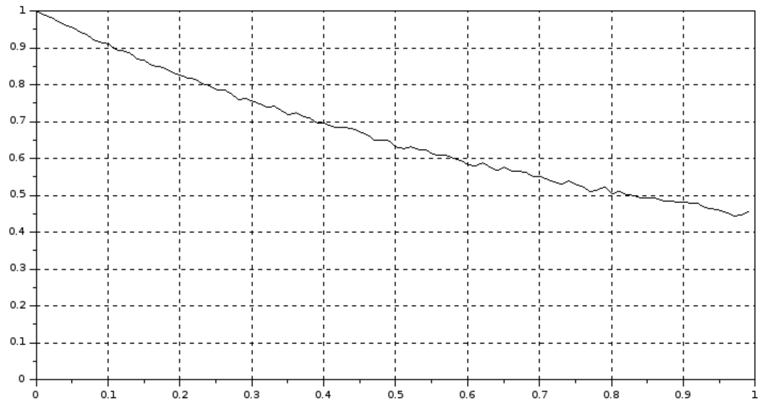
6. **Simulation informatique**

a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `def simule_X():` qui simule la v.a.r. X.

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0,1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```python
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10**4
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r + 1/N
    return r
```

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

7. **Étude de la variable aléatoire Y**

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

8. ***a)*** Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\,\mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.