DS3 barème (version A)

Exercice 1 (EDHEC 2019)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice relativement à la base canonique $\mathscr{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est I.

1. *a)* Déterminer $(A - I)^2$.

- **1 pt :** $(A - I)^2 = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$

b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et de A.

- **1 pt :** $(A - I)^2 = A^2 - 2A + I$ **(car A et I commutent)**
- **1 pt :** $A^{-1} = -A + 2I$

2. On pose $A = N + I$.

a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et de N puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

- **1 pt :** $\forall k \geqslant 2, N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ **par récurrence immédiate**
- **1 pt :** I **et** N **commutent**
- **1 pt : Ecriture correcte du binôme de Newton**
- **1 pt : Découpage de la somme en deux (pour $n \geqslant 1$)**
- **1 pt : Utilisation de $N^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$ pour $k \geqslant 2$ et fin du calcul :** $A^n = I + nN$
- **1 pt : Cas $n = 0$**
- **1 pt :** $A^n = (1 - n)I + nA$

0 pt à la question si la formule du binôme est fausse

b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

- **1 pt :** $A^{-1} = -A + 2I$ **et** $(1 - (-1))I + (-1)A = -A + 2I$

0 pt à la question si il est écrit $A^{-1} = (1 - (-1))I + (-1)A = -A + 2I$

3. *a)* Utiliser la première question pour déterminer la seule valeur propre de A.

- **1 pt :** $(X - 1)^2$ **polynôme annulateur de A donc** $\text{Sp}(A) \subset \{1\}$
- **1 pt :** $(A - I)$ **est non inversible donc** 1 **est bien une valeur propre de** A

b) En déduire si A est ou n'est pas diagonalisable.

- **1 pt : Ecriture correcte "A est diagonalisable" en raisonnant par l'absurde**
- **1 pt : conclusion $A = I$, ce qui est faux, donc A n'est pas diagonalisable**

4. On pose $u_1 = (f - \text{id})(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.

a) Montrer que le rang de $f - \text{id}$ est égal à 1.

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{rg}(A-I) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ **est libre donc** $\mathrm{rg}(f-\mathrm{id}) = 1$

b) Justifier que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$.

- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((f-\mathrm{id})(u_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **donc** $u_1 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$
- **1 pt :** $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((f-\mathrm{id})(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **donc** $u_2 \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})$
- **1 pt : Thm du rang** $\implies \dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id})) = 2$
- **1 pt :** (u_1, u_2) **est libre**
- **1 pt :** $\mathrm{Card}((u_1, u_2)) = 2 = \dim(\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}))$

5. a) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.

- **1 pt : Ecriture correcte "famille libre" :** $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 e_1 = 0$
- **1 pt : Application de** $f-\mathrm{id}$ **pour obtenir** $\lambda_3 = 0$
- **1 pt :** (u_1, u_2) **est libre** $\implies \lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- **1 pt :** $\mathrm{Card}((u_1, u_2, e_1)) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

b) Déterminer la matrice T de f dans cette même base.

- **3 pts :** $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **décomposé en**
  - × **1 pt :** $f(u_1) = 1u_1 + 0u_2 + 0e_1$ **ou** $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f(u_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - × **1 pt :** $f(u_2) = 0u_1 + 1u_2 + 0e_1$ **ou** $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f(u_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
  - × **1 pt :** $f(e_1) = 1u_1 + 0u_2 + 1e_1$ **ou** $\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

max 2 pts à la question si il y a une confusion d'objets ou si T est incorrecte

6. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Justifier l'inversibilité de P puis écrire la relation existant entre les matrices A, T, P et P^{-1}.

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(P) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt : la réduite obtenue est inversible (triangulaire supérieure + coefficients diagonaux non nuls)**
- **1 pt : Formule de changement de base :** $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B},(u_1,u_2,e_1)}\mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f)P_{(u_1,u_2,e_1),\mathscr{B}}$
- **1 pt : On reconnait** $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$**,** $T = \mathrm{Mat}_{(u_1,u_2,e_1)}(f)$ **et** $P = P_{\mathscr{B},(u_1,u_2,e_1)}$

7. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{1,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que pour tout $(i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui vaut 1.

a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.

- **1 pt : écriture système associé à l'équation matricielle** $MT = TM$
- **1 pt : résolution système**
- **1 pt :** $E = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ **où** $\mathcal{F} = \big(E_{1,1} + E_{3,3},\ E_{1,2},\ E_{1,3},\ E_{2,2},\ E_{2,3}\big)$
- **1 pt :** $\mathcal{F}$ **est libre**
- **1 pt :** $\mathcal{F}$ **est une base de** E **donc** $\dim(E) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 5$

b) Soit N une matrice quelconque de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \quad \Leftrightarrow \quad \big(P^{-1}NP\big)\,T \ = \ T\,\big(P^{-1}NP\big)$$

- **1 pt : Utilisation de** $A = PTP^{-1}$
- **1 pt : multiplication à gauche par** P^{-1} **et à droite par** P

c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $\big(P\,(E_{1,1}+E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)$.

- **1 pt :** $N \in F \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP) \iff (P^{-1}NP) \in E$
- **1 pt :** $N \in F \iff \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5, P^{-1}NP = \lambda_1 \cdot (E_{1,1} + E_{3,3}) + \lambda_2 \cdot E_{1,2} + \lambda_3 \cdot E_{1,3} + \lambda_4 \cdot E_{2,2} + \lambda_5 \cdot E_{2,3}$
- **1 pt :** $N \in F \iff N \in \mathrm{Vect}\,\big(P\,(E_{1,1} + E_{3,3})\,P^{-1}, P\,E_{1,2}\,P^{-1}, P\,E_{1,3}\,P^{-1}, P\,E_{2,2}\,P^{-1}, P\,E_{2,3}\,P^{-1}\big)$

Exercice 2 (EML 2015)

Dans cet exercice on pourra utiliser l'encadrement suivant : $2 < \mathrm{e} < 3$.

Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \varphi(x) = x^2 \,\mathrm{e}^x - 1$.

1. Dresser le tableau de variations de φ, en précisant la limite de φ en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.

- **1 pt** : La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$
- **1 pt** : $\varphi'(x) \ = \ x\,(2+x)\,\mathrm{e}^x$
- **1 pt** : tableau de variations correct

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-1	$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-2}-1$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

- **1 pt** : $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^2\,\mathrm{e}^x \ = 0$ par croissances comparées
- **1 pt** : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$

2. Établir que l'équation $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x \in \,]0;+\infty[$, admet une solution et une seule, notée α, et que α appartient à l'intervalle $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$.

- **1 pt** : $\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{x^2} \ \Leftrightarrow \ x^2\,\mathrm{e}^x = 1 \ \Leftrightarrow \ x^2\,\mathrm{e}^x - 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ \varphi(x) = 0$
- **1 pt** : φ est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$
- **1 pt** : $\varphi(]0,+\infty[) \ =]-1,+\infty[$
- **1 pt** : $0 \in \,]-1,+\infty[$
- **1 pt** : $\varphi(\frac{1}{2}) < \varphi(\alpha) < \varphi(1)$
- **1 pt** : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ par stricte croissance de φ sur l'intervalle $]0,+\infty[$

Partie II : Étude d'une suite

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3\,\mathrm{e}^x$,
et la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. Ecrire une fonction en **Python** (nommée `suiteU`) qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.

```
def suiteU(n):
    u = 1                         #initialisation de la suite
    for k in range(n):            #boucle de taille n
        u = (u**3) * np.exp(u)    #u_(n+1) = f(u_n)
    return u                      #on renvoie u_n
```

- **1 pt** : initialisation

- **2 pt** : boucle for

4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 1$.

- **1 pt** : initialisation
- **2 pt** : hérédité

5. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

- **1 pt** : $u_{n+1} - u_n \ = \ (u_n^2\,\mathrm{e}^{u_n} - 1)\ u_n$
- **1 pt** : $\mathrm{e}^{u_n} \geqslant \mathrm{e}^1 \geqslant 1$ et $u_n^2 \geqslant 1$

6. Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

- **1 pt** : si (u_n) majorée, alors (u_n) converge vers un réel $\ell \geqslant 1$
- **1 pt** : f est continue en ℓ donc $\ell = f(\ell)$
- **1 pt** : on en déduit que $\ell = \alpha < 1$
- **1 pt** : (u_n) est croissante et non majorée donc (u_n) diverge vers $+\infty$

Partie III : Étude d'une série

7. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(n)}$.

- **1 pt** : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{f(n)} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{n^2} \geqslant 0$
- **1 pt** : $\dfrac{1}{f(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- **1 pt** : la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, elle est donc convergente
- **1 pt** : conclusion via le critère de négligeabilité des séries à termes positifs

8. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left| S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} \right| \leqslant \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^n}$.

- **1 pt** : $S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)} = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k}$
- **1 pt** : $\sum\limits_{k=n+1}^{N} \dfrac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \ \leqslant \ \sum\limits_{k=n+1}^{N} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$
- **1 pt** : la série $\sum\limits_{k\geqslant n+1} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^k$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in \,]-1,1[$, elle est donc convergente
- **1 pt** : $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)}$
- **1 pt** : par passage à la limite, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k} \ \leqslant \ \dfrac{1}{\mathrm{e}^n\ (\mathrm{e}-1)}$
- **1 pt** : $\left|S - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{f(k)}\right| \ = \ \left|\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k}\right| \ = \ \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^3\,\mathrm{e}^k}$

9. En déduire une fonction en **Python** qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

```
def f(x):
    return (x**3) * np.exp(x)
```

```
def approx():
    n = 0
    S = 0
    while np.exp(n)*(np.e - 1) < 10**4:
        n = n + 1
        S = S + 1/f(n)
    return S
```

- **1 pt** : syntaxe fonction correcte
- **1 pt** : condition d'arrêt boucle while
- **1 pt** : incrémentation compteur
- **1 pt** : calcul somme de manière itérative

Exercice 3 (ECRICOME 2017)

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre 2, 4, 1, 5 et 9, alors on obtient : $S_1 = 2$, $S_2 = 6$, $S_3 = 7$, $S_4 = 12$, $S_5 = 21$ et $T_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.

- **1 pt :** $X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$
- **1 pt :** $\forall i \in [\![1, n]\!], \mathbb{P}([X_k = i]) = \dfrac{1}{n}$ **par équiprobabilité**
- **1 pt :** $X_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_k) = \dfrac{n+1}{2}$

2. a) Déterminer $T_n(\Omega)$.

- **1 pt :** $T_n(\Omega) = [\![1, n]\!]$
- **1 pt : explications satisfaisantes**

b) Calculer $\mathbb{P}([T_n = 1])$.

- **1 pt :** $[T_n = 1] \ = \ [X_1 = n]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T_n = 1]) = \dfrac{1}{n}$

c) Montrer que :
$$\mathbb{P}([T_n = n]) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

- **1 pt : L'événement $[T_n = n]$ est réalisé ssi la somme des numéros des boules obtenues est supérieur à n pour la première fois lors du $n^{\text{ème}}$ tirage**
- **1 pt :** $[T_n = n] \ = \ \bigcap\limits_{k=1}^{n-1} [X_k = 1]$
- **1 pt : indépendance citée**

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.

- **1 pt :** $T_2(\Omega) = [\![1, 2]\!] = \{1, 2\}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T_2 = 1]) = \mathbb{P}([T_2 = 2]) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $T_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, 2]\!])$

4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([T_3 = 1]) = \dfrac{1}{3}$**,** $\mathbb{P}([T_3 = 2]) = \dfrac{5}{9}$ **et** $\mathbb{P}([T_3 = 3]) = \dfrac{1}{9}$
- **1 pt : La v.a.r. T_3 est finie donc elle admet une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(T_3) = \dfrac{16}{9}$

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- **1 pt :** $S_k(\Omega) = [\![k, nk]\!]$
- **1 pt : explications satisfaisantes**

6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.

a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1}.

- **1 pt :** $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$

b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer alors que :
$$\forall i \in [\![k+1, n]\!],\ \mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j]).$$

- **1 pt : La famille $([S_k = j])_{j \in [\![k, kn]\!]}$ forme un système complet d'événements**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \sum\limits_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [S_{k+1} = i])$ **(FPT correcte)**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \sum\limits_{j=k}^{nk} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([S_{k+1} = i]) = \sum\limits_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}([S_k = j] \cap [X_{k+1} = i - j])$ **(justification via le système formé de deux encadrements)**
- **1 pt : lemme des coalitions cité**

7. *a)* Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\dbinom{j-1}{k-1}$, $\dbinom{j-1}{k}$ et $\dbinom{j}{k}$.

- 1 pt : $\dbinom{j}{k} = \dbinom{j-1}{k} + \dbinom{j-1}{k-1}$

b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:

$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}.$$

- 2 pts : somme télescopique bien présentée

c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathcal{H}_k$ la proposition :

$$\text{« } \forall i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}([S_k = i]) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \text{ ».}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{H}_k$ est vraie.

- 2 pts : initialisation

- 2 pts : hérédité

- 1 pt : rédaction récurrence précise à chaque étape

8. a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les événements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.

- 1 pt : $[T_n > k] \ \subset \ [S_k \leqslant n-1]$

- 1 pt : $[S_k \leqslant n-1] \ \subset \ [T_n > k]$

b) En déduire que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\mathbb{P}([T_n > k]) = \dfrac{1}{n^k} \dbinom{n-1}{k}$.

- 2 pts : cas général

× **1 pt :** $\mathbb{P}([S_k \leqslant n-1]) = \sum\limits_{i=k}^{n-1} \mathbb{P}([S_k = i])$

× **1 pt : fin du calcul**

- 1 pt : Cas $k = 0$

9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$.

- 1 pt : La v.a.r. T_n **est finie. Elle admet donc une espérance.**

- 1 pt : T_n **est à valeurs entières :**

$$[T_n > k-1] \ = \ [T_n \geqslant k] \ = \ [T_n > k] \cup [T_n = k]$$

- 1 pt : les événements $[T_n > k]$ **et** $[T_n = k]$ **sont incompatibles, donc :**

$$\mathbb{P}([T_n > k-1]) \ = \ \mathbb{P}([T_n > k]) + \mathbb{P}([T_n = k])$$

- 3 pts : $\mathbb{E}(T_n) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}([T_n > k])$ **(1 pt si quelques idées mais bloqué en cours de route)**

- 2 pts : $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n-1}$ **(utilisation binôme)**

10. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

- 1 pt : mise sous forme exponentielle

- 1 pt : $\ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$

- **1 pt : la fonction** $\exp$ **est continue en** 1**, donc, par composition de limites,** $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}$

11. On rappelle que la commande `rd.randint(a,b)` simule une v.a.r. qui suit la loi uniforme sur $[\![a, b-1]\!]$.Compléter la fonction suivante pour qu'elle simule la v.a.r. T_n :

```
def SimulT(n):
    S=0
    k=0
    while _________ :
        S = _____________________________
        k = _______
    return _____
```

- **1 pt :** `while S < n`
- **1 pt :** `S = S + rd.randint(1,n+1)`
- **1 pt :** `k = k+1`
- **1 pt :** `return k`

Exercice 4 (EML 2018)

On dispose d'une pièce de monnaie amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et Face avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$.

Partie I : Étude d'une première variable aléatoire

On effectue une succession de lancers avec cette pièce et on définit la variable aléatoire X prenant la valeur du nombre de Face obtenus avant l'obtention du deuxième Pile.

1. a) Décrire les événements $[X = 0]$, $[X = 1]$, $[X = 2]$ puis calculer leurs probabilités.

- **1 pt : Pour tout** $k \in \mathbb{N}^*$**, on définit les événements suivants :**

$$P_k \ : \ \text{« obtenir Pile au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$

$$F_k \ : \ \text{« obtenir Face au } k^{\text{ème}} \text{ lancer »}$$

- **1 pt :** $[X = 0] = P_1 \cap P_2$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = 0]) = \dfrac{4}{9}$
- **1 pt :** $[X = 1] \ = \ (F_1 \cap P_2 \cap P_3) \cup (P_1 \cap F_2 \cap P_3)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = 1]) = 2\ \dfrac{4}{3^3} = \dfrac{8}{27}$
- **2 pt :** $[X = 2] \ = \ (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) \cup (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4)$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X = 2]) = 3\ \dfrac{4}{3^4} = \dfrac{4}{27}$
- **1 pt : indépendance citée au moins une fois**
- **1 pt : incompatibilité citée au moins une fois**

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([X = n]) = (n+1)\,\dfrac{4}{3^{n+2}}$.

- **1 pt : L'événement** $[X = n]$ **est réalisé par les tirages qui contiennent** n **Face et** 2 **Pile, et dont le** $2^{\text{ème}}$ **Pile est obtenu au lancer** $n+2$

- **1 pt : De tels $(n+2)$-tirages sont entièrement caractérisés par :**
  - $\times$ **la place du 2^{nd} Pile : 1 choix (le $(n+2)^{\text{ème}}$ lancer),**
  - $\times$ **la place du 1^{er} Pile : $(n+1)$ choix (du 1^{er} lancer au $(n+1)^{\text{ème}}$ lancer).**

  Il y a donc $1 \times (n+1) = n+1$ tels $(n+2)$-tirages
- **1 pt : tous ces $(n+2)$-tirages ont la même probabilité d'apparition, car ils comportent tous le même nombre de Face (n) et le même nombre de Pile (2).**
  Donc en particulier, ils ont la même probabilité d'apparition que le tirage suivant qui réalise l'événement :

$$F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}$$

- **1 pt : $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) = \mathbb{P}(F_1)\,\mathbb{P}(F_2)\,\cdots\,\mathbb{P}(F_n)\,\mathbb{P}(P_{n+1})\,\mathbb{P}(P_{n+2})$ par indépendance**
- **1 pt : $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1} \cap P_{n+2}) = \dfrac{4}{3^{n+2}}$**

Partie II : Étude d'une expérience en deux étapes

On effectue une succession de lancers avec la pièce précédente jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; puis en fonction du nombre n de Face obtenus, on place $n+1$ boules dans une urne, les boules étant numérotées de 0 à n et indiscernables au toucher, et enfin on pioche au hasard une boule de cette urne.

On note toujours X la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de Face obtenus, et on note U la variable aléatoire prenant la valeur du numéro de la boule obtenue. On pose : $V = X - U$.

2. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable U.

- **1 pt : Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher parmi les boules numérotées de 0 à n.**
  Donc la v.a.r. U peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et n.
- **1 pt : Ceci est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ car $X(\Omega) = \mathbb{N}$ donc $U(\Omega) = \mathbb{N}$**

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$.

- **1 pt : si l'événement $[X = n]$ est réalisé, alors l'expérience consiste à piocher au hasard une boule parmi les boules numérotées de 0 à n**
- **1 pt : si $k \in [\![n+1, +\infty[\![$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = 0$**
  car il est impossible de piocher une boule de numéro supérieur ou égal à $(n+1)$
- **1 pt : si $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k]) = \dfrac{1}{n+1}$**
  car la probabilité de choisir parmi ces $(n+1)$ boules est uniforme
- **1 pt : la loi conditionnelle de U sachant $[X = n]$ est la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$**

c) En déduire, pour tout k de $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}([U = k]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\,\mathbb{P}([X = n]) \quad \text{puis} \quad \mathbb{P}([U = k]) = \frac{2}{3^{k+1}}$$

- **1 pt : La famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements**
- **1 pt : D'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}([U = k]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [U = k])$**
- **1 pt : $\mathbb{P}([U = k]) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\,\mathbb{P}_{[X=n]}([U = k])$**

- **1 pt :** $\mathbb{P}([U = k]) = \dfrac{4}{3^2} \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \dfrac{1}{3^n}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U = k]) = \dfrac{4}{3^{k+2}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$
- **1 pt : on reconnait la somme d'une série géométrique convergente de raison $q = \frac{1}{3}$ avec $|q| < 1$**

d) Montrer que U admet une espérance et une variance et les calculer.

- **1 pt : La v.a.r. U admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k\,\mathbb{P}([U = k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{N} k\,\mathbb{P}([U = k]) = \dfrac{2}{3^2} \sum\limits_{k=1}^{N} k \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-1}$
- **1 pt : On reconnaît la somme partielle d'ordre N de la série géométrique dérivée de raison $\dfrac{1}{3}$ (avec $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$), donc elle converge. Ainsi, la v.a.r. U admet une espérance**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(U) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt : La v.a.r. U admet une variance si et seulement si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} k^2\,\mathbb{P}([U = k])$ converge absolument, ce qui équivaut à démontrer sa convergence car la série est à termes positifs**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{N} k^2\,\mathbb{P}([U = k]) = \sum\limits_{k=2}^{N} k(k-1)\,\mathbb{P}([U = k]) + \sum\limits_{k=1}^{N} k\,\mathbb{P}([U = k])$
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=2}^{N} k(k-1)\,\mathbb{P}([U = k]) = \dfrac{2}{3^3} \sum\limits_{k=2}^{N} k(k-1) \left(\dfrac{1}{3}\right)^{k-2}$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(U^2) = 1$
- **1 pt : d'après la formule de Kœnig-Huygens :** $\mathbb{V}(U) = \mathbb{E}(U^2) - \big(\mathbb{E}(U)\big)^2$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(U) = \dfrac{3}{4}$

3. a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable V.

- **1 pt : Supposons que l'événement $[X = n]$ est réalisé. Alors la v.a.r. $V = X - U$ peut prendre toutes les valeurs entières entre $n - 0$ et $n - n$, c'est-à-dire toutes les valeurs entières entre 0 et n**
- **1 pt : Ceci étant valable pour tout $n \in X(\Omega) = \mathbb{N}$, on en déduit : $V(\Omega) = \mathbb{N}$**

b) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V sachant $[X = n]$.

- **1 pt : Si $k \in [\![n+1, +\infty[\![$, alors $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = 0$**
- **1 pt : Si $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = \mathbb{P}_{[X=n]}([U = n-k])$**
- **1 pt : Si $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}_{[X=n]}([V = k]) = \dfrac{1}{n+1}$**

c) En déduire la loi de V.

- **1 pt : pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de V par rapport à $[X = n]$ est la même que la loi conditionnelle de U par rapport à $[X = n]$**
- **1 pt : en faisant les même calculs que précédemment, on a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}([V = k]) = \dfrac{2}{3^{k+1}}$**

4. Montrer que les variables aléatoires U et V sont indépendantes.

- **2 pt :** $\mathbb{P}([U=k]\cap[V=j]) = \dfrac{4}{3^{k+j+2}}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([U=k])\ \mathbb{P}([V=j]) \ = \ \dfrac{2}{3^{k+1}} \times \dfrac{2}{3^{j+1}} \ = \ \dfrac{4}{3^{k+j+2}}$

5. Que vaut $\mathrm{Cov}(U,V)$? En déduire $\mathrm{Cov}(X,U)$?

- **1 pt : Les v.a.r. U et V sont indépendantes d'après la question précédente donc** $\mathrm{Cov}(U,V)=0$
- **1 pt :** $\mathrm{Cov}(X,U) = \mathrm{Cov}(U+V,U)$
- **1 pt :** $\mathrm{Cov}(X,U) = \mathrm{Cov}(U,U) + \mathrm{Cov}(V,U)$
- **1 pt :** $\mathrm{Cov}(X,U) = \mathbb{V}(U)$
- **1 pt :** $\mathrm{Cov}(X,U) = \frac{3}{4}$

Partie III : Étude d'un jeu

Dans cette partie, p désigne un réel de $]0,1[$.

Deux individus A et B s'affrontent dans un jeu de Pile ou Face dont les règles sont les suivantes :

- le joueur A dispose de la pièce amenant Pile avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$ et lance cette pièce jusqu'à l'obtention du deuxième Pile ; on note X la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur B dispose d'une autre pièce amenant Pile avec la probabilité p et lance cette pièce jusqu'à l'obtention d'un Pile ; on note Y la v.a.r. prenant la valeur du nombre de Face alors obtenus ;
- le joueur A gagne si son nombre de Face obtenus est inférieur ou égal à celui de B ; sinon c'est le joueur B qui gagne.

On dit que le jeu est équilibré lorsque les joueurs A et B ont la même probabilité de gagner.

6. **Simulation informatique**

a) Écrire une fonction **Python** d'en-tête `function x = simule_X()` qui simule la v.a.r. X.

```
1  def simule_X():
2      nbFace = 0
3      nbPile = 0
4      while nbPile < 2:
5          lancer = rd.binomial(1,2/3)
6          if lancer==1:
7              nbPile = nbPile + 1
8          else:
9              nbFace = nbFace + 1
10     return nbFace
```

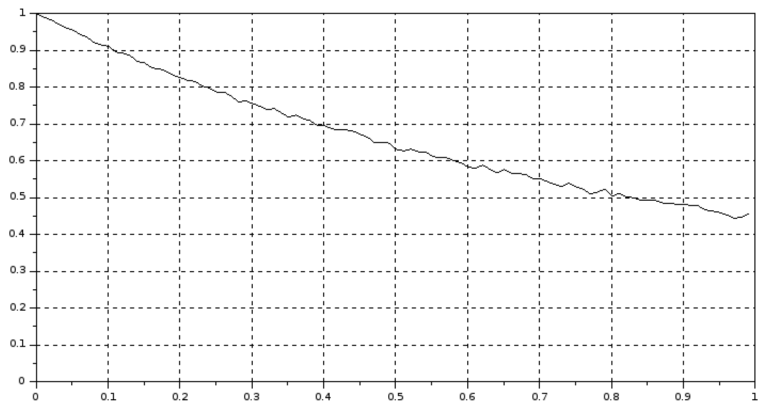
- **1 pt : initialisation lignes 2 et 3**
- **1 pt : condition boucle while**
- **1 pt : utilisation de rd.binomial avec les bons paramètres**
- **1 pt : gestion des deux cas avec if**

b) On suppose que l'on dispose d'une fonction `simule_Y` qui, prenant en argument un réel p de $]0,1[$, simule la variable aléatoire Y. Expliquer ce que renvoie la fonction suivante :

```
def mystere(p):
    r = 0
    N = 10**4
    for k in range(N):
        x = simule_X()
        y = simule_Y(p)
        if x <= y:
            r = r + 1/N
    return r
```

- **1 pt : Cette fonction permet d'obtenir une approximation de la probabilité** $\mathbb{P}([X \leqslant Y])$ **en fonction du paramètre** p
- **1 pt : explications pertinentes**

c) On trace, en fonction de p, une estimation de la probabilité que A gagne et on obtient le graphe suivant :



À la vue de ce graphe, conjecturer une valeur de p pour laquelle le jeu serait équilibré.

- **1 pt : On conjecture que la valeur de** p **pour laquelle le jeu est équilibré est** $0,83$

7. **Étude de la variable aléatoire** Y

On note Z la variable aléatoire prenant la valeur du nombre de lancers effectués par le joueur B.

a) Reconnaître la loi de Z et préciser son (ses) paramètre(s), son espérance et sa variance.

- **1 pt : Pour le joueur** B**, l'expérience consiste en la succession d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de succès Pile, de probabilité** p
- **1 pt : La v.a.r.** Z **est la v.a.r. associée au rang d'obtention du premier Pile, donc du premier succès**
- **1 pt :** $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{p}$
- **1 pt :** $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{1-p}{p^2}$

b) Exprimer Y à l'aide de Z et en déduire l'existence de l'espérance et de la variance de Y et préciser leurs valeurs.

- **1 pt :** $Y = Z - 1$
- **1 pt : La v.a.r. Y admet donc une espérance et une variance en tant que transformée affine d'une v.a.r. qui en admet**
- **1 pt : Par linéarité de l'espérance,** $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1-p}{p}$
- **1 pt : Par propriété de la variance,** $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$

c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}([Y \geqslant n]) = (1-p)^n$.

- **1 pt :** $Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- **1 pt : Si** $n = 0$**,** $\mathbb{P}([Y \geqslant 0]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1 \ = (1-p)^0$
- **1 pt : si** $n \geqslant 1$**,** $\mathbb{P}([Y \geqslant n]) = 1 - \mathbb{P}([Z \leqslant n])$
- **1 pt :** $[Z \leqslant n] \ = \ \bigcup\limits_{k=1}^{n} [Z = k]$
- **1 pt : Les événements** $[Z = 1]$**,** $\ldots$**,** $[Z = n]$ **sont incompatibles donc**
  $\mathbb{P}([Z \leqslant n]) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Z = k])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([Z \leqslant n]) = 1 - (1-p)^n$

8. a) Montrer : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\,\mathbb{P}([Y \geqslant n])$.

- **1 pt : La famille** $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt : D'après la formule des probabilités totales,**
  $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n] \cap [X \leqslant Y])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\ \mathbb{P}([n \leqslant Y])$ **par indépendance**

b) Déduire des résultats précédents : $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{3^2} \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\ \left(\dfrac{1-p}{3}\right)^{n-1}$
- **1 pt : On reconnaît la somme d'une série géométrique dérivée de raison** $\dfrac{1-p}{3}$ **(avec** $\left|\dfrac{1-p}{3}\right| < 1$**), donc elle converge bien**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{4}{(2+p)^2}$ **sans arnaque**

c) Déterminer la valeur de p pour lequel le jeu est équilibré.

- **1 pt : le jeu est équilibré ssi** $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{1}{2}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X \leqslant Y]) = \dfrac{1}{2} \iff 2(\sqrt{2} - 1) = p$