DS3 (version B)

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_3[x]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$\big(f(P)\big)(x) = -3\,x\,P(x) + x^2\,P'(x), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. ***a)*** Rappeler la dimension de E.

b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

c) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E.

d) La matrice M est-elle inversible ?

e) `(CUBES UNIQUEMENT)` La matrice M est-elle diagonalisable ?

f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

g) Préciser le noyau $\text{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.

h) Déterminer l'image $\text{Im}(f)$ de f.

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = \text{id}_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \text{Ker}\left(u^3\right)$.
Montrer que la famille $\big(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\big)$ est une base de E.

b) Montrer que g est un automorphisme de E.
Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

c) Établir l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}\,(g - \text{id}_E)$.

Exercice 2

Préliminaire

1. Montrer, pour tout entier naturel non nul n, l'égalité : $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Partie I

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires.
On tire au hasard, successivement et *sans remise*, les N boules de cette urne.
Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

2. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

3. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1, N]\!]$. Montrer :

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leqslant i < j \leqslant N \end{cases}$$

4. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2. Ces variables sont-elles indépendantes ?

5. ***a)*** Démontrer que la variable $N+1-X_2$ a même loi que X_1.

b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1.

6. À l'aide des résultats de la question ***5*** :

a) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

b) Montrer l'égalité des variances $\mathbb{V}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

c) `(CUBES UNIQUEMENT)` Établir la relation : $2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$
(où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2).

7. Calculer $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire $\mathbb{V}(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Partie II

On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, N\}$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

8. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\dfrac{N-1}{N}$.

9. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par : $\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \ldots, N\}$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$$

Problème

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.
Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard dans U_n. On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.
On note $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (respectivement $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Dans tout le problème, $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B, où B est un événement non négligeable.

Partie I

1. On pose : $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

où ln désigne le logarithme népérien.

b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leqslant h_n \leqslant 1 + \ln(n)$.

c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

2. On pose : $k_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

b) En déduire la majoration : $k_n \leqslant 2$.

c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

Partie II. Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n.

1. ***a)*** Quelle est la loi de I_n ?

b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$?

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{2, \ldots, n\}, \ \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j-1])$$

2. ***a)*** Quelle est la loi de X_1 ?

b) Quel est l'événement $[X_2 = 1]$? Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

c) Calculer $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2])$.
Déterminer la loi de X_3, son espérance et sa variance.

d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3).

e) `(CUBES UNIQUEMENT)` En déduire la covariance du couple (I_3, X_3). Les variables aléatoires I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?

3. a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \ldots, n\}$.

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$.

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1])$$

d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n\,\mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1)\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geqslant 1,\ \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$$

4. a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant ***3.d)*** :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

5. a) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$ et de $\mathbb{E}(X_{n-1})$.

b) En déduire : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la **Partie I**).

c) Donner un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

6. Soit $(T_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose :

$$S_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} T_i \;=\; T_1 + \cdots + T_n$$

a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([S_n = j]) \;=\; \frac{1}{n}\,\mathbb{P}([S_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n}\,\mathbb{P}([S_{n-1} = j])$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

c) Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.