

## DS3 barème (version B)

### Exercice 1 (HEC 2013)

On note  $E = \mathbb{R}_3[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit  $f$  l'application définie sur  $E$  qui associe à tout polynôme  $P \in E$ , le polynôme  $f(P)$  défini par :

$$(f(P))(X) = -3X P(X) + X^2 P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. a) Rappeler la dimension de  $E$ .

- 1 pt :  $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$

b) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

- 1 pt : caractère morphisme

- 2 pts : caractère endo ( $f(P)$  est un polynôme + de degré 3 au max)

c) Déterminer la matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique de  $E$ .

- 2 pts :  $f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)$ .

- 1 pt : conclusion  $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) La matrice  $M$  est-elle inversible ?

- 1 pt :  $M$  n'est pas inversible (triangulaire avec au moins un 0 sur la diagonale, ou bien dernière colonne nulle)

e) La matrice  $M$  est-elle diagonalisable ?

- 1 pt :  $\text{Sp}(M) = \{0\}$  ( $M$  triangulaire inférieure)

- 2 pts :  $M$  n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde (si elle l'était, on aurait  $M = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$ )

f) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $M^n$ .

- 1 pt :  $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt :  $\forall n \geq 4, M^n = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$

g) Préciser le noyau  $\text{Ker}(f)$  de  $f$  ainsi qu'une base de  $\text{Ker}(f)$ .

- 3 pts :  $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(P_3)$

(1 pt pour l'écriture du système, 1 pt pour la résolution, 1 pt pour ne pas confondre  $\mathbb{R}_3[X]$  et  $\mathbb{R}^4$ )

- 1 pt :  $(P_3)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ .

h) Déterminer l'image  $\text{Im}(f)$  de  $f$ .

- 1 pt :  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(-3P_1, -2P_2, -P_3, 0_E)$  (calculs déjà faits pour déterminer  $M$ )

- 1 pt :  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$

2. On note  $\text{id}_E$  et  $0_E$  respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de  $E$ , et pour tout endomorphisme  $v$  de  $E$ , on pose  $v^0 = \text{id}_E$  et pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $v^k = v \circ v^{k-1}$ .

Soit  $u$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que :  $u^4 = 0_E$ ,  $u^3 \neq 0_E$  et  $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$ .

a) Soit  $P$  un polynôme de  $E$  tel que  $P \notin \text{Ker}(u^3)$ .

Montrer que la famille  $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$  est une base de  $E$ .

- 1 pt : écriture correcte de la définition de liberté

- 1 pt : appliquer  $u^3$  de part et d'autre et en conclure  $\lambda_3 = 0$

- 1 pt : de même, en appliquant  $u^2$  dans la nouvelle égalité ...

- 1 pt : base car de cardinal maximal

b) Montrer que  $g$  est un automorphisme de  $E$ .

Déterminer l'automorphisme réciproque  $g^{-1}$  en fonction de  $u$ .

- 3 pts : soit par pivot on inverse  $M$ , soit on remarque  $(\text{id} - u) \circ (\text{id} + u + u^2 + u^3) = \text{id} - u^4$

On met seulement un point pour la détermination de  $g$  et 2 points pour la détermination de  $g^{-1}$ .

c) Établir l'égalité :  $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(g - \text{id}_E)$ .

- 1 pt :  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(g - \text{id})$

- 1 pt : pour un théorème du rang

- 1 pt :  $\dim(\text{Im}(u)) = 3$  donc  $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$

- 1 pt :  $\dim(\text{Im}(g - \text{id})) = 3$  donc  $\dim(\text{Ker}(g - \text{id})) = 1$

## Exercice 2 (ESCP 2001)

### Préliminaire

1. Montrer, pour tout entier naturel non nul  $n$ , l'égalité :  $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ .

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

### Partie I

Soit  $N$  un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient  $N$  boules dont  $N - 2$  sont blanches et 2 sont noires.

On tire au hasard, successivement et *sans remise*, les  $N$  boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à  $N$ , on note  $X_1$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et  $X_2$  la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

2. Préciser l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

- 2 pts :  $\Omega$  est l'ensemble des  $N$ -uplets d'éléments distincts de  $\{b_1, \dots, b_N\}$ .
- 1 pt :  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- 1 pt :  $\mathbb{P}$  est la probabilité uniforme

3. Soit  $i$  et  $j$  deux entiers de l'intervalle  $\llbracket 1, N \rrbracket$ . Montrer :

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

- 1 pt : cas  $i \geq j$
- 3 pts : cas  $i < j$  (dont 1 pt pour introduction  $N_k$  et  $B_k$  si besoin)

4. Déterminer les lois de probabilité des variables  $X_1$  et  $X_2$ . Ces variables sont-elles indépendantes ?

- 1 pt :  $X_1(\Omega) = \llbracket 1, N-1 \rrbracket$

- 1 pt :  $X_2(\Omega) = \llbracket 2, N \rrbracket$

- 1 pt : FPT

- 1 pt :  $\sum_{j=2}^N \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{j=i+1}^N \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 2 \frac{N-i}{N(N-1)}$

- 2 pts : avec le même raisonnement  $\mathbb{P}([X_2 = j]) = 2 \frac{j-1}{N(N-1)}$

- 2 pts : les v.a.r.  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes (1 pt pour voir que le cas  $N = 2$  est à part et que dans ce cas  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes)

5. a) Démontrer que la variable  $N + 1 - X_2$  a même loi que  $X_1$ .

- 1 pt :  $(N + 1 - X_2)(\Omega) = \llbracket 1, N-1 \rrbracket$

- 2 pts :  $\mathbb{P}([N + 1 - X_2 = i]) = 2 \frac{N-i}{N(N-1)}$  (dont 1 pt pour  $N + 1 - i \in \llbracket 2, N \rrbracket$ )

**b)** Déterminer la loi de la variable  $X_2 - X_1$  et la comparer à celle de  $X_1$ .

- 1 pt :  $(X_2 - X_1)(\Omega) \subset \llbracket 1, N-1 \rrbracket$
- 1 pt : FPT
- 2 pts :  $\sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i]) = \sum_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k+i])$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) = \frac{2}{N} \frac{(N-k)}{(N-1)}$

**6.** À l'aide des résultats de la question 5 :

**a)** Calculer les espérances  $\mathbb{E}(X_1)$  et  $\mathbb{E}(X_2)$ .

- 1 pt : les v.a.r. utilisées admettent une espérance car sont finies
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_1) = N + 1 - \mathbb{E}(X_2)$
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1)$
- 1 pt : résolution système ( $\mathbb{E}(X_1) = \frac{N+1}{3}$  et  $\mathbb{E}(X_2) = 2 \frac{N+1}{3}$ )

**b)** Montrer l'égalité des variances  $\mathbb{V}(X_1)$  et  $\mathbb{V}(X_2)$ .

- 1 pt : les v.a.r. utilisées admettent une variance car sont finies
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(N + 1 - X_2)$
- 1 pt :  $\mathbb{V}(N + 1 - X_2) = \mathbb{V}(X_2)$

**c)** Seulement pour les cubes : Établir la relation :  $2 \operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$  (où  $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$  désigne la covariance des variables  $X_1$  et  $X_2$ ).

- 1 pt : existence  $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2 - X_1)$
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_2 - X_1) = \mathbb{V}(X_2) - 2 \operatorname{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_1)$
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_2) - 2 \operatorname{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_1) = 2 \mathbb{V}(X_1) - 2 \operatorname{Cov}(X_1, X_2)$

**7.** Calculer  $\mathbb{V}(X_1)$ . En déduire  $\mathbb{V}(X_2)$  et  $\operatorname{Cov}(X_1, X_2)$ .

- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_1^2) = \sum_{i=1}^{N-1} i^2 \mathbb{P}([X = i])$
- 1 pt :  $\sum_{i=1}^{N-1} i^2 = \frac{(N-1) N (2(N-1)+1)}{6}$
- $$\sum_{i=1}^{N-1} i^3 = \frac{(N-1)^2 N^2}{4}$$
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{N (N+1)}{6}$
- 1 pt : formule de Koenig-Huygens
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_1) = \frac{(N+1) (N-2)}{18}$
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_2) = \frac{(N+1) (N-2)}{18}$  et  $\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(N+1) (N-2)}{36}$

## Partie II

On suppose que  $A$  et  $B$  sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, N\}$  et on désigne par  $D$  l'événement : «  $A$  ne prend pas la même valeur que  $B$  ».

**8.** Montrer que la probabilité de l'événement  $D$  est  $\frac{N-1}{N}$ .

- **1 pt** :  $D = [A \neq B]$
- **1 pt** :  $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}([A = B])$
- **1 pt** : FPT
- **3 pts** :  $\mathbb{P}(D) = \frac{N-1}{N}$  (dont 1 pt pour indépendance de  $A$  et  $B$  et 1 pt pour  $A \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$  et  $B \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$ )

**9.** Soit  $Y_1$  et  $Y_2$  les variables aléatoires définies par : 
$$\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$$

Calculer, pour tout couple  $(i, j)$  d'éléments de  $\{1, 2, \dots, N\}$ , la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$$

- **1 pt** :  $\mathbb{P}(D) \neq 0$
- **1 pt** : si  $i > j$ ,  $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0$  (car  $[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] = \emptyset$ )
- **2 pts** : si  $i = j$ ,  $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0$  (car  $D \cap ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = \emptyset$ )
- **5 pts** : cas  $i < j$  :
  - × **1 pt** :  $D \cap ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = [Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]$
  - × **1 pt** :  $[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] = ([A = i] \cap [B = j]) \cup ([A = j] \cap [B = i])$
  - × **1 pt** : incompatibilité
  - × **1 pt** :  $A$  et  $B$  indépendantes
  - × **1 pt** : fin du calcul  $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = \frac{2}{N(N-1)}$

## Problème (HEC 2000)

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.

Dans tout le problème,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne  $U_n$  contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ .

On tire une boule au hasard dans  $U_n$ . On note  $k$  le numéro de cette boule.

- Si  $k$  est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si  $k$  est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne  $U_n$  les boules numérotées de  $k$  à  $n$  (il reste donc les boules numérotées de 1 à  $k - 1$ ), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note  $Y_n$  la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.

On note  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$  (respectivement  $\mathbb{E}(Y_n)$  et  $\mathbb{V}(Y_n)$ ) l'espérance et la variance de  $X_n$  (respectivement  $Y_n$ ).

Dans tout le problème,  $\mathbb{P}_B(A)$  désigne la probabilité conditionnelle de  $A$  sachant  $B$ , où  $B$  est un événement non négligeable.

### Partie I

1. On pose :  $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ .

- a) Montrer, pour tout entier naturel  $k$  non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

où  $\ln$  désigne le logarithme népérien.

- 1 pt : décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$
- 1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant

- b) En déduire les inégalités :  $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$ .

- 1 pt :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

- 1 pt : sommation télescopique

- 1 pt :  $h_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq h_n$

- 1 pt :  $h_n \leq 1 + \ln(n)$

- c) Déterminer un équivalent simple de  $h_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

- 1 pt : division par  $\ln(n) > 0$  (0 si  $n \geq 2$  non précisé)

- 1 pt :  $h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$  par théorème d'encadrement

2. On pose :  $k_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ .

a) Montrer, pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

• 1 pt :  $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$

• 1 pt :  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$  par décroissance de la fonction inverse sur  $]0, +\infty[$

b) En déduire la majoration :  $k_n \leq 2$ .

• 1 pt :  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$

• 1 pt : télescopage

• 1 pt :  $2 - \frac{1}{n} \leq 2$

c) Déterminer un équivalent simple de  $h_n - k_n$  quand  $n$  tend vers l'infini.

• 1 pt :  $h_n - 2 \leq h_n - k_n \leq h_n$

• 1 pt :  $\frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{2}{\ln(n)} \leq \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} \leq \frac{h_n}{\ln(n)}$

• 1 pt :  $h_n - k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$  par théorème d'encadrement

## Partie II. Étude de la variable aléatoire $X_n$

On note  $I_n$  la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne  $U_n$ .

1. a) Quelle est la loi de  $I_n$  ?

• 2 pts :

× 1 pt : description expérience et v.a.r.

× 1 pt :  $I_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$

b) Quelle est la loi conditionnelle de  $X_n$  sachant  $[I_n = 1]$  ?

• 1 pt : loi conditionnelle de  $X_n$  sachant  $[I_n = 1]$  est la loi certaine égale à 1 (0 au moindre non sens)

c) Si  $n$  est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{2, \dots, n\}, \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j-1])$$

• 2 pts : toute explication raisonnable

2. a) Quelle est la loi de  $X_1$  ?

• 1 pt :  $X_1$  suit la loi certaine égale à 1 (0 si seulement «  $X_1$  suit une loi certaine »)

**b)** Quel est l'événement  $[X_2 = 1]$ ? Donner la loi de  $X_2$ , son espérance et sa variance.

- 1 pt :  $[X_2 = 1] = [I_2 = 1]$
- 1 pt :  $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{2}$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{1}{2}$
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2}$  et  $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{4}$

**c)** Calculer  $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2])$ ,  $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2])$ ,  $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2])$ .  
Déterminer la loi de  $X_3$ , son espérance et sa variance.

- 1 pt :  $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2]) = 0$
- 1 pt :  $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2]) = 1$
- 1 pt :  $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2]) = \frac{1}{2}$
- 2 pts :  $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{1}{2}$ 
  - × 1 pt : FPT sur le SCE ( $[I_3 = 1], [I_3 = 2], [I_3 = 3]$ )
  - × 1 pt :  $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $\mathbb{P}([I_3 = 1]) \neq 0$

**fin du calcul**

- 1 pt :  $\mathbb{P}([X_3 = 1]) = \frac{1}{3}$
- × 1 pt :  $[X_3 = 1] = [I_3 = 1]$   
 $\mathbb{P}([I_3 = 1]) = \frac{1}{3}$
- 1 pt :  $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \frac{1}{6}$
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_3) = \frac{11}{6}$
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_3^2) = \frac{23}{6}$
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_3) = \frac{17}{36}$

**d)** Déterminer la loi du couple  $(I_3, X_3)$ .

- 1 pt :  $I_3(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ,  $X_3(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$
- 1 pt : cas  $j = 1$  ( $[I_3 = 1] \cap [X_3 = 1] = [X_3 = 1]$ ,  $[I_3 = 2] \cap [X_3 = 1] = \emptyset$ ,  $[I_3 = 3] \cap [X_3 = 1] = \emptyset$ )
- 1 pt : cas  $j = 3$  ( $[I_3 = 1] \cap [X_3 = 3] = \emptyset$ ,  $[I_3 = 2] \cap [X_3 = 3] = \emptyset$ ,  $[I_3 = 3] \cap [X_3 = 3] = [X_3 = 3]$ )

- 1 pt : cas  $j = 2$  ( $\mathbb{P}([I_3 = k] \cap [X_3 = j]) = \mathbb{P}([I_3 = k]) \mathbb{P}_{[I_3=k]}([X_3 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } k = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } k = 3 \end{cases}$

**e)** (CUBES UNIQUEMENT) En déduire la covariance du couple  $(I_3, X_3)$ . Les variables aléatoires  $I_3$  et  $X_3$  sont-elles indépendantes?

- 1 pt :  $I_3$   $X_3$  admet une espérance

- **2 pts** :  $\mathbb{E}(I_3 X_3) = \frac{25}{6}$
- **1 pt** :  $\text{Cov}(I_3, X_3) = \frac{1}{2}$
- **1 pt** :  $I_3$  et  $X_3$  non indépendantes car  $\text{Cov}(I_3, X_3) \neq 0$

3. a) Montrer que  $X_n$  prend ses valeurs dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

- **1 pt**

b) Déterminer  $\mathbb{P}([X_n = 1])$  et  $\mathbb{P}([X_n = n])$ .

- **1 pt** :  $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{n}$
- **4 pts** :  $\mathbb{P}([X_n = n]) = \frac{1}{n!}$ 
  - × **1 pt** :  $[X_n = n] = \bigcap_{i=1}^n A_i$
  - × **1 pt** : **FPC**
  - × **1 pt** :  $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{1}{i}$
  - × **1 pt** : **fin calcul**

c) Si  $n$  est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geq 2, \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1])$$

- **1 pt** :  $\mathbb{P}([X_n = j]) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([I_n = k] \cap [X_n = j])$  (**FPT**)
- **1 pt** :  $= \sum_{k=2}^n \mathbb{P}([I_n = k]) \times \mathbb{P}_{[I_n = k]}([X_n = j])$  (**d'après 1.b)**)
- **1 pt** :  $= \sum_{k=2}^n \mathbb{P}([I_n = k]) \times \mathbb{P}([X_{k-1} = j-1])$  (**d'après 1.c)**)
- **1 pt** : **fin calcul**

d) Si  $n$  est supérieur ou égal à 3 et  $j$  supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n \mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1) \mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

En déduire, si  $n$  est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geq 1, \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$$

- **1 pt** :  $\forall n \geq 3, \forall j \geq 2, n \mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1) \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) = \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- **1 pt** :  $\forall n \geq 3, \forall j \geq 2, \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- **3 pts** : **cas**  $n = 2$ 
  - × **1 pt** : **cas**  $j \geq 3$
  - × **1 pt** : **cas**  $j = 2$
  - × **1 pt** : **cas**  $j = 1$

4. a) Si  $n$  est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant 3.d) :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

- 1 pt :  $X_{n-1}$  et  $X_n$  admettent une espérance
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- 1 pt :  $= \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n j \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- 1 pt :  $= \frac{n-1}{n} \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = j])$
- 1 pt :  $([X_{n-1} = j])_{j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  est un système complet d'événements

b) En déduire  $\mathbb{E}(X_n)$  et donner un équivalent simple de  $\mathbb{E}(X_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

- 1 pt :  $\sum_{k=2}^n (\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1})) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_n) = h_n$  donc  $\mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

5. a) Si  $n$  est supérieur ou égal à 2, calculer  $\mathbb{E}(X_n^2)$  en fonction de  $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$  et de  $\mathbb{E}(X_{n-1})$ .

- 1 pt :  $X_{n-1}$  et  $X_n$  admettent une variance
- 1 pt :  $\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- 1 pt :  $= \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n j^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- $= \frac{n-1}{n} \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j])$
- 1 pt :  $([X_{n-1} = j])_{j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  est un système complet d'événements
- 1 pt :  $= \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n} \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$

b) En déduire :  $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$  (en reprenant les notations de la **Partie I**).

- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_n) = \left( \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n} \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \right) - \left( \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \right)^2$  (d'après 6.a) et 7.a))
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$
- 1 pt :  $\sum_{k=2}^n (\mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1})) = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right)$
- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$

c) Donner un équivalent de  $\mathbb{V}(X_n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.

- 1 pt :  $\mathbb{V}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

- 6.** Soit  $(T_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout  $i$  entier naturel non nul,  $T_i$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $\frac{1}{i}$ . On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i = T_1 + \cdots + T_n$$

**a)** Vérifier que  $X_1$  et  $T_1$  ont même loi.

• **1 pt**

**b)** Si  $n$  est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel  $j$  non nul :

$$\mathbb{P}([S_n = j]) = \frac{1}{n} \mathbb{P}([S_{n-1} = j-1]) + \frac{n-1}{n} \mathbb{P}([S_{n-1} = j])$$

En déduire que  $X_n$  et  $S_n$  ont même loi.

• **1 pt** :  $\mathbb{P}([S_n = j]) = \mathbb{P}([T_n = 0] \cap [S_n = j]) + \mathbb{P}([T_n = 1] \cap [S_n = j])$  (**FPT**)

• **1 pt** :  $\mathbb{P}([S_n = j]) = \mathbb{P}([T_n = 0] \cap [S_{n-1} = j]) + \mathbb{P}([T_n = 1] \cap [S_{n-1} = j-1])$

• **1 pt** :  $T_n$  et  $S_{n-1}$  indépendantes par lemme des coalitions

• **1 pt** :  $\mathbb{P}([S_n = j]) = \frac{n-1}{n} \times \mathbb{P}([S_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \times \mathbb{P}([S_{n-1} = j-1])$

• **1 pt** : initialisation

• **4 pts** : hérédité

  × **2 pts** :  $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

  × **2 pts** :  $j = 0$  (**1 pt** pour  $[S_{n+1} = 0] = \bigcap_{i=1}^{n+1} [T_i = 0]$ , **1 pt** pour indépendance de  $T_1, \dots, T_{n+1}$ )

**c)** Retrouver ainsi  $\mathbb{E}(X_n)$  et  $\mathbb{V}(X_n)$ .

• **1 pt** :  $S_n$  admet une variance (et donc une espérance)

• **1 pt** :  $\mathbb{E}(S_n) = h_n$

• **1 pt** :  $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(T_i)$  (par indépendance de  $T_1, \dots, T_n$ )

• **1 pt** :  $\mathbb{V}(S_n) = h_n - k_n$

• **1 pt** : même loi  $\Rightarrow$  mêmes moments