
DS3 barème (version B)

Exercice 1 (HEC 2013)

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$(f(P))(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. a) Rappeler la dimension de E .

- 1 pt : $\dim(E) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$

b) Montrer que f est un endomorphisme de E .

- 1 pt : caractère morphisme

- 2 pts : caractère endo ($f(P)$ est un polynôme + de degré 3 au max)

c) Déterminer la matrice M de f dans la base canonique de E .

- 2 pts : $f(P_0), f(P_1), f(P_2), f(P_3)$.

- 1 pt : conclusion $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

d) La matrice M est-elle inversible ?

- 1 pt : M n'est pas inversible (triangulaire avec au moins un 0 sur la diagonale, ou bien dernière colonne nulle)

e) La matrice M est-elle diagonalisable ?

- 1 pt : $\text{Sp}(M) = \{0\}$ (M triangulaire inférieure)

- 2 pts : M n'est pas diagonalisable en procédant par l'absurde (si elle l'était, on aurait $M = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$)

f) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n .

- 1 pt : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 1pt : $\forall n \geq 4, M^n = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{R})}$

g) Préciser le noyau $\text{Ker}(f)$ de f ainsi qu'une base de $\text{Ker}(f)$.

- 3 pts : $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(P_3)$

(1 pt pour l'écriture du système, 1 pt pour la résolution, 1 pt pour ne pas confondre $\mathbb{R}_3[X]$ et \mathbb{R}^4)

- 1 pt : (P_3) est une base de $\text{Ker}(f)$.

h) Déterminer l'image $\text{Im}(f)$ de f .

- 1 pt : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(-3P_1, -2P_2, -P_3, 0_E)$ (calculs déjà faits pour déterminer M)

- 1 pt : $\text{Im}(f) = \text{Vect}(P_1, P_2, P_3)$

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E , et pour tout endomorphisme v de E , on pose $v^0 = \text{id}_E$ et pour tout k de \mathbb{N}^* , $v^k = v \circ v^{k-1}$.
Soit u et g deux endomorphismes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = \text{id}_E + u + u^2 + u^3$.

a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin \text{Ker}(u^3)$.

Montrer que la famille $(P, u(P), u^2(P), u^3(P))$ est une base de E .

- 1 pt : écriture correcte de la définition de liberté
- 1 pt : appliquer u^3 de part et d'autre et en conclure $\lambda_3 = 0$
- 1 pt : de même, en appliquant u^2 dans la nouvelle égalité ...
- 1 pt : base car de cardinal maximal

b) Montrer que g est un automorphisme de E .

Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u .

- 3 pts : soit par pivot on inverse M , soit on remarque $(\text{id} - u) \circ (\text{id} + u + u^2 + u^3) = \text{id} - u^4$

On met seulement un point pour la détermination de g et 2 points pour la détermination de g^{-1} .

c) Établir l'égalité : $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(g - \text{id}_E)$.

- 1 pt : $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(g - \text{id})$
- 1 pt : pour un théorème du rang
- 1 pt : $\dim(\text{Im}(u)) = 3$ donc $\dim(\text{Ker}(u)) = 1$
- 1 pt : $\dim(\text{Im}(g - \text{id})) = 3$ donc $\dim(\text{Ker}(g - \text{id})) = 1$

Exercice 2 (ESCP 2001)

Preliminaire

1. Montrer, pour tout entier naturel non nul n , l'égalité : $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

- 1 pt : initialisation
- 2 pts : hérédité

Partie I

Soit N un entier supérieur ou égal à 2.

Une urne contient N boules dont $N - 2$ sont blanches et 2 sont noires.

On tire au hasard, successivement et *sans remise*, les N boules de cette urne.

Les tirages étant numérotés de 1 à N , on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

2. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on peut utiliser pour modéliser cette expérience aléatoire.

- 2 pts : Ω est l'ensemble des N -uplets d'éléments distincts de $\{b_1, \dots, b_N\}$.
- 1 pt : $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$
- 1 pt : \mathbb{P} est la probabilité uniforme

3. Soit i et j deux entiers de l'intervalle $\llbracket 1, N \rrbracket$. Montrer :

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq i \leq N \\ \frac{2}{N(N-1)} & \text{si } 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

- 1 pt : cas $i \geq j$
- 3 pts : cas $i < j$ (dont 1 pt pour introduction N_k et B_k si besoin)

4. Déterminer les lois de probabilité des variables X_1 et X_2 . Ces variables sont-elles indépendantes ?

- 1 pt : $X_1(\Omega) = \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$
- 1 pt : $X_2(\Omega) = \llbracket 2, N \rrbracket$
- 1 pt : FPT
- 1 pt : $\sum_{j=2}^N \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \sum_{j=i+1}^N \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = 2 \frac{N - i}{N(N - 1)}$
- 2 pts : avec le même raisonnement $\mathbb{P}([X_2 = j]) = 2 \frac{j - 1}{N(N - 1)}$
- 2 pts : les v.a.r. X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes (1 pt pour voir que le cas $N = 2$ est à part et que dans ce cas X_1 et X_2 sont indépendantes)

5. a) Démontrer que la variable $N + 1 - X_2$ a même loi que X_1 .

- 1 pt : $(N + 1 - X_2)(\Omega) = \llbracket 1, N - 1 \rrbracket$
- 2 pts : $\mathbb{P}([N + 1 - X_2 = i]) = 2 \frac{N - i}{N(N - 1)}$ (dont 1 pt pour $N + 1 - i \in \llbracket 2, N \rrbracket$)

b) Déterminer la loi de la variable $X_2 - X_1$ et la comparer à celle de X_1 .

- 1 pt : $(X_2 - X_1)(\Omega) \subset \llbracket 1, N-1 \rrbracket$

- 1 pt : **FPT**

- 2 pts : $\sum_{i=1}^{N-1} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k + i]) = \sum_{i=1}^{N-k} \mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = k + i])$

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = k]) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)}$

6. À l'aide des résultats de la question 5 :

a) Calculer les espérances $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(X_2)$.

- 1 pt : **les v.a.r. utilisées admettent une espérance car sont finies**

- 1 pt : $\mathbb{E}(X_1) = N + 1 - \mathbb{E}(X_2)$

- 1 pt : $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1)$

- 1 pt : **résolution système** ($\mathbb{E}(X_1) = \frac{N+1}{3}$ et $\mathbb{E}(X_2) = 2 \frac{N+1}{3}$)

b) Montrer l'égalité des variances $\mathbb{V}(X_1)$ et $\mathbb{V}(X_2)$.

- 1 pt : **les v.a.r. utilisées admettent une variance car sont finies**

- 1 pt : $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(N + 1 - X_2)$

- 1 pt : $\mathbb{V}(N + 1 - X_2) = \mathbb{V}(X_2)$

c) **Seulement pour les cubes** : Établir la relation : $2 \text{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{V}(X_1)$
(où $\text{Cov}(X_1, X_2)$ désigne la covariance des variables X_1 et X_2).

- 1 pt : **existence** $\text{Cov}(X_1, X_2)$

- 1 pt : $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2 - X_1)$

- 1 pt : $\mathbb{V}(X_2 - X_1) = \mathbb{V}(X_2) - 2 \text{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_1)$

- 1 pt : $\mathbb{V}(X_2) - 2 \text{Cov}(X_1, X_2) + \mathbb{V}(X_1) = 2 \mathbb{V}(X_1) - 2 \text{Cov}(X_1, X_2)$

7. Calculer $\mathbb{V}(X_1)$. En déduire $\mathbb{V}(X_2)$ et $\text{Cov}(X_1, X_2)$.

- 1 pt : $\mathbb{E}(X_1^2) = \sum_{i=1}^{N-1} i^2 \mathbb{P}([X = i])$

- 1 pt : $\sum_{i=1}^{N-1} i^2 = \frac{(N-1) N (2(N-1) + 1)}{6}$

$\sum_{i=1}^{N-1} i^3 = \frac{(N-1)^2 N^2}{4}$

- 1 pt : $\mathbb{E}(X_1^2) = \frac{N(N+1)}{6}$

- 1 pt : **formule de Koenig-Huygens**

- 1 pt : $\mathbb{V}(X_1) = \frac{(N+1)(N-2)}{18}$

- 1 pt : $\mathbb{V}(X_2) = \frac{(N+1)(N-2)}{18}$ et $\text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{(N+1)(N-2)}{36}$

Partie II

On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, N\}$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

8. Montrer que la probabilité de l'événement D est $\frac{N-1}{N}$.

- 1 pt : $D = [A \neq B]$
- 1 pt : $\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}([A = B])$
- 1 pt : **FPT**
- 3 pts : $\mathbb{P}(D) = \frac{N-1}{N}$ (dont 1 pt pour indépendance de A et B et 1 pt pour $A \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$ et $B \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$)

9. Soit Y_1 et Y_2 les variables aléatoires définies par :
$$\begin{cases} Y_1 = \min(A, B) \\ Y_2 = \max(A, B) \end{cases}$$

Calculer, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, 2, \dots, N\}$, la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j])$$

- 1 pt : $\mathbb{P}(D) \neq 0$
- 1 pt : si $i > j$, $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0$ (car $[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] = \emptyset$)
- 2 pts : si $i = j$, $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = 0$ (car $D \cap ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = \emptyset$)
- 5 pts : cas $i < j$:
 - × 1 pt : $D \cap ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = [Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]$
 - × 1 pt : $[Y_1 = i] \cap [Y_2 = j] = ([A = i] \cap [B = j]) \cup ([A = j] \cap [B = i])$
 - × 1 pt : incompatibilité
 - × 1 pt : A et B indépendantes
 - × 1 pt : fin du calcul $\mathbb{P}_D([Y_1 = i] \cap [Y_2 = j]) = \frac{2}{N(N-1)}$

Problème (HEC 2000)

Ce problème se compose de deux parties. Si le candidat ne parvient pas à établir un résultat demandé, il l'indiquera clairement, et il pourra pour la suite admettre ce résultat.

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On considère une urne U_n contenant n boules numérotées de 1 à n .

On tire une boule au hasard dans U_n . On note k le numéro de cette boule.

- Si k est égal à 1, on arrête les tirages.
- Si k est supérieur ou égal à 2, on enlève de l'urne U_n les boules numérotées de k à n (il reste donc les boules numérotées de 1 à $k-1$), et on effectue à nouveau un tirage dans l'urne.

On répète ces tirages jusqu'à l'obtention de la boule numéro 1.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule numéro 1. On note Y_n la variable aléatoire égale à la somme des numéros des boules tirées.

On note $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ (respectivement $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$) l'espérance et la variance de X_n (respectivement Y_n).

Dans tout le problème, $\mathbb{P}_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B , où B est un événement non négligeable.

Partie I

1. On pose : $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

a) Montrer, pour tout entier naturel k non nul, les inégalités :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

où \ln désigne le logarithme népérien.

- **1 pt : décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^***
- **1 pt : croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant**

b) En déduire les inégalités : $\ln(n+1) \leq h_n \leq 1 + \ln(n)$.

- **1 pt : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$**
- **1 pt : sommation télescopique**
- **1 pt : $h_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq h_n$**
- **1 pt : $h_n \leq 1 + \ln(n)$**

c) Déterminer un équivalent simple de h_n quand n tend vers l'infini.

- **1 pt : division par $\ln(n) > 0$ (0 si $n \geq 2$ non précisé)**
- **1 pt : $h_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ par théorème d'encadrement**

2. On pose : $k_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

a) Montrer, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, l'inégalité :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

• 1 pt : $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)}$

• 1 pt : $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ par décroissance de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$

b) En déduire la majoration : $k_n \leq 2$.

• 1 pt : $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$

• 1 pt : télescopage

• 1 pt : $2 - \frac{1}{n} \leq 2$

c) Déterminer un équivalent simple de $h_n - k_n$ quand n tend vers l'infini.

• 1 pt : $h_n - 2 \leq h_n - k_n \leq h_n$

• 1 pt : $\frac{h_n}{\ln(n)} - \frac{2}{\ln(n)} \leq \frac{h_n - k_n}{\ln(n)} \leq \frac{h_n}{\ln(n)}$

• 1 pt : $h_n - k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ par théorème d'encadrement

Partie II. Étude de la variable aléatoire X_n

On note I_n la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée dans l'urne U_n .

1. a) Quelle est la loi de I_n ?

• 2 pts :

× 1 pt : description expérience et v.a.r.

× 1 pt : $I_n \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$

b) Quelle est la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$?

• 1 pt : loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = 1]$ est la loi certaine égale à 1 (0 au moindre non sens)

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{2, \dots, n\}, \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j]) = \mathbb{P}([X_{k-1} = j-1])$$

• 2 pts : toute explication raisonnable

2. a) Quelle est la loi de X_1 ?

• 1 pt : X_1 suit la loi certaine égale à 1 (0 si seulement « X_1 suit une loi certaine »)

b) Quel est l'événement $[X_2 = 1]$? Donner la loi de X_2 , son espérance et sa variance.

- 1 pt : $[X_2 = 1] = [I_2 = 1]$
- 1 pt : $X_2(\Omega) = \{1, 2\}$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X_2 = 1]) = \frac{1}{2}$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X_2 = 2]) = \frac{1}{2}$
- 1 pt : $\mathbb{E}(X_2) = \frac{3}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{4}$

c) Calculer $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2])$, $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2])$.
Déterminer la loi de X_3 , son espérance et sa variance.

- 1 pt : $\mathbb{P}_{[I_3=1]}([X_3 = 2]) = 0$
- 1 pt : $\mathbb{P}_{[I_3=2]}([X_3 = 2]) = 1$
- 1 pt : $\mathbb{P}_{[I_3=3]}([X_3 = 2]) = \frac{1}{2}$
- 2 pts : $\mathbb{P}([X_3 = 2]) = \frac{1}{2}$
 × 1 pt : **FPT sur le SCE** ($[I_3 = 1], [I_3 = 2], [I_3 = 3]$)
 × 1 pt : $\forall i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket, \mathbb{P}([I_3 = 1]) \neq 0$

fin du calcul

- 1 pt : $\mathbb{P}([X_3 = 1]) = \frac{1}{3}$
 × 1 pt : $[X_3 = 1] = [I_3 = 1]$
 $\mathbb{P}([I_3 = 1]) = \frac{1}{3}$
- 1 pt : $\mathbb{P}([X_3 = 3]) = \frac{1}{6}$
- 1 pt : $\mathbb{E}(X_3) = \frac{11}{6}$
- 1 pt : $\mathbb{E}(X_3^2) = \frac{23}{6}$
- 1 pt : $\mathbb{V}(X_3) = \frac{17}{36}$

d) Déterminer la loi du couple (I_3, X_3) .

- 1 pt : $I_3(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket, X_3(\Omega) = \llbracket 1, 3 \rrbracket$
- 1 pt : **cas** $j = 1$ ($[I_3 = 1] \cap [X_3 = 1] = [X_3 = 1], [I_3 = 2] \cap [X_3 = 1] = \emptyset, [I_3 = 3] \cap [X_3 = 1] = \emptyset$)
- 1 pt : **cas** $j = 3$ ($[I_3 = 1] \cap [X_3 = 3] = \emptyset, [I_3 = 2] \cap [X_3 = 3] = \emptyset, [I_3 = 3] \cap [X_3 = 3] = [X_3 = 3]$)

- 1 pt : **cas** $j = 2$ ($\mathbb{P}([I_3 = k] \cap [X_3 = j]) = \mathbb{P}([I_3 = k]) \mathbb{P}_{[I_3=k]}([X_3 = j]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } k = 2 \\ \frac{1}{6} & \text{si } k = 3 \end{cases}$)

e) (CUBES UNIQUEMENT) En déduire la covariance du couple (I_3, X_3) . Les variables aléatoires I_3 et X_3 sont-elles indépendantes ?

- 1 pt : I_3, X_3 admet une espérance

- **2 pts** : $\mathbb{E}(I_3 X_3) = \frac{25}{6}$
- **1 pt** : $\text{Cov}(I_3, X_3) = \frac{1}{2}$
- **1 pt** : I_3 et X_3 **non indépendantes** car $\text{Cov}(I_3, X_3) \neq 0$

3. a) Montrer que X_n prend ses valeurs dans $\{1, 2, \dots, n\}$.

- **1 pt**

b) Déterminer $\mathbb{P}([X_n = 1])$ et $\mathbb{P}([X_n = n])$.

- **1 pt** : $\mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1}{n}$
- **4 pts** : $\mathbb{P}([X_n = n]) = \frac{1}{n!}$
- × **1 pt** : $[X_n = n] = \bigcap_{i=1}^n A_i$
- × **1 pt** : **FPC**
- × **1 pt** : $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{i-1}}(A_i) = \frac{1}{i}$
- × **1 pt** : **fin calcul**

c) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer la relation :

$$\forall j \geq 2, \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_k = j-1])$$

- **1 pt** : $\mathbb{P}([X_n = j]) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([I_n = k] \cap [X_n = j])$ (**FPT**)
- **1 pt** : $= \sum_{k=2}^n \mathbb{P}([I_n = k]) \times \mathbb{P}_{[I_n=k]}([X_n = j])$ (**d'après 1.b**)
- **1 pt** : $= \sum_{k=2}^n \mathbb{P}([I_n = k]) \times \mathbb{P}([X_{k-1} = j-1])$ (**d'après 1.c**)
- **1 pt** : **fin calcul**

d) Si n est supérieur ou égal à 3 et j supérieur ou égal à 2, calculer :

$$n \mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1) \mathbb{P}([X_{n-1} = j])$$

En déduire, si n est un entier supérieur ou égal à 2 :

$$\forall j \geq 1, \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$$

- **1 pt** : $\forall n \geq 3, \forall j \geq 2, n \mathbb{P}([X_n = j]) - (n-1) \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) = \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- **1 pt** : $\forall n \geq 3, \forall j \geq 2, \mathbb{P}([X_n = j]) = \frac{n-1}{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- **3 pts** : **cas** $n = 2$
 - × **1 pt** : **cas** $j \geq 3$
 - × **1 pt** : **cas** $j = 2$
 - × **1 pt** : **cas** $j = 1$

4. a) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, en utilisant **3.d**) :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$$

- **1 pt** : X_{n-1} et X_n admettent une espérance
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_n) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- **1 pt** : $= \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n j \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- **1 pt** : $= \frac{n-1}{n} \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \mathbb{P}([X_{n-1} = j])$
- **1 pt** : $([X_{n-1} = j])_{j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ est un système complet d'événements

b) En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et donner un équivalent simple de $\mathbb{E}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

- **1 pt** : $\sum_{k=2}^n (\mathbb{E}(X_k) - \mathbb{E}(X_{k-1})) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_n) = h_n$ donc $\mathbb{E}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

5. a) Si n est supérieur ou égal à 2, calculer $\mathbb{E}(X_n^2)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_{n-1}^2)$ et de $\mathbb{E}(X_{n-1})$.

- **1 pt** : X_{n-1} et X_n admettent une variance
- **1 pt** : $\mathbb{E}(X_n^2) = \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n j^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- **1 pt** : $= \frac{n-1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \sum_{j=2}^n j^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j-1])$
- $= \frac{n-1}{n} \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} (j+1)^2 \mathbb{P}([X_{n-1} = j])$
- **1 pt** : $([X_{n-1} = j])_{j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket}$ est un système complet d'événements
- **1 pt** : $= \mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n} \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n}$

b) En déduire : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$ (en reprenant les notations de la **Partie I**).

- **1 pt** : $\mathbb{V}(X_n) = \left(\mathbb{E}(X_{n-1}^2) + \frac{2}{n} \mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \right) - \left(\mathbb{E}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} \right)^2$ (d'après **6.a**) et **7.a**)
- **1 pt** : $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(X_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$
- **1 pt** : $\sum_{k=2}^n (\mathbb{V}(X_k) - \mathbb{V}(X_{k-1})) = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right)$
- **1 pt** : $\mathbb{V}(X_n) = h_n - k_n$

c) Donner un équivalent de $\mathbb{V}(X_n)$ quand n tend vers l'infini.

- **1 pt** : $\mathbb{V}(X_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$

6. Soit $(T_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout i entier naturel non nul, T_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$. On pose :

$$S_n = \sum_{i=1}^n T_i = T_1 + \dots + T_n$$

a) Vérifier que X_1 et T_1 ont même loi.

• 1 pt

b) Si n est supérieur ou égal à 2, montrer, pour tout entier naturel j non nul :

$$\mathbb{P}([S_n = j]) = \frac{1}{n} \mathbb{P}([S_{n-1} = j - 1]) + \frac{n-1}{n} \mathbb{P}([S_{n-1} = j])$$

En déduire que X_n et S_n ont même loi.

• 1 pt : $\mathbb{P}([S_n = j]) = \mathbb{P}([T_n = 0] \cap [S_n = j]) + \mathbb{P}([T_n = 1] \cap [S_n = j])$ (**FPT**)

• 1 pt : $\mathbb{P}([S_n = j]) = \mathbb{P}([T_n = 0] \cap [S_{n-1} = j]) + \mathbb{P}([T_n = 1] \cap [S_{n-1} = j - 1])$

• 1 pt : T_n et S_{n-1} indépendantes par lemme des coalitions

• 1 pt : $\mathbb{P}([S_n = j]) = \frac{n-1}{n} \times \mathbb{P}([S_{n-1} = j]) + \frac{1}{n} \times \mathbb{P}([S_{n-1} = j - 1])$

• 1 pt : initialisation

• 4 pts : hérédité

× 2 pts : $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$

× 2 pts : $j = 0$ (1 pt pour $[S_{n+1} = 0] = \bigcap_{i=1}^{n+1} [T_i = 0]$, 1 pt pour indépendance de T_1, \dots, T_{n+1})

c) Retrouver ainsi $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$.

• 1 pt : S_n admet une variance (et donc une espérance)

• 1 pt : $\mathbb{E}(S_n) = h_n$

• 1 pt : $\mathbb{V}(S_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(T_i)$ (par indépendance de T_1, \dots, T_n)

• 1 pt : $\mathbb{V}(S_n) = h_n - k_n$

• 1 pt : même loi \Rightarrow mêmes moments