Planche HEC : DL

Exercice avec préparation 1
On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$$

1. **Cours :** Énoncer le théorème d'intégration par parties.

2. ***a)*** Quelle est la valeur de I_0 ?

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. Que peut-on en déduire ?

3. ***a)*** Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, valable pour tout entier naturel n.

b) Écrire une fonction **Python** prenant en entrée un entier naturel n et renvoyant I_n (cette fonction devra utiliser la relation de récurrence précédente).

c) Déduire de la question ***3.a)*** une formule pour I_n utilisant des factorielles, où $n \in \mathbb{N}$.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{n!\, \mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \qquad \text{et} \qquad v_n = \ln(u_n)$$

a) On **admet** que : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

En déduire que :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

b) En déduire que la suite (u_n) converge et admet pour limite un réel strictement positif.

5. On **admet** que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$.

En déduire un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u'(x)v(x)\ dx = \left[\ u(x)v(x)\ \right]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\ dx$$

2. ***a)*** $I_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^0\ dt = \int_0^1 1\ dt = 1.$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\ dt - \int_0^1 (1-t^2)^n\ dt \\ &= \int_0^1 (1-t^2)^n \big((1-t^2)-1\big)\ dt && \textit{(par linéarité)} \\ &= -\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\ dt \end{aligned}$$

Or : $\forall t \in [0,1],\ t^2(1-t^2)^n \geqslant 0$.
Par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant : $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (I_n) \text{ est décroissante.}}$$

Toujours par croissance de l'intégrale, la suite (I_n) est minorée par 0.

$$\boxed{\text{D'après le théorème de convergence monotone, la suite } (I_n) \text{ converge.}}$$

3. ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. On procède par IPP :

$$\left|\begin{array}{ll} u(t) = (1-t^2)^{n+1} & u'(t) = -2(n+1)t(1-t^2)^n \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array}\right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On a alors :

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\ dt \\ &= \left[\ t(1-t^2)^{n+1}\ \right]_0^1 + \int_0^1 2(n+1)t^2(1-t^2)^n\ dt \\ &= 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\ dt \\ &= 2(n+1)(I_n - I_{n+1}) && \textit{(d'après le calcul de la question } \boldsymbol{2.b)}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où, pour tout } n \in \mathbb{N} : I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n.}$$

b) On propose la fonction suivante :

```python
def suiteI(n):
    I = 1
    for k in range(n):
        I = I * (2*k+2)/(2*k+3)
    return I
```

c) Commençons par remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \neq 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{2k+2}{2k+3}$$

Faisons le produit de tous ces termes pour k variant de 0 à $n-1$.

- Tout d'abord, par télescopage :
$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{I_{k+1}}{I_k} = \frac{I_n}{I_0} = I_n$$

- Ensuite :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+2}{2k+3} &= \frac{\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+2)\right)^2}{\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+2)\right)\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+3)\right)} \\
&= \frac{\left(\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+2)\right)^2}{\prod\limits_{k=0}^{n-1} (2k+2)(2k+3)} \\
&= \frac{\left(2^n \prod\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\right)^2}{(2n+1)!} \\
&= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que, pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.}$$

4. a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\dfrac{(n+1)!\,\mathrm{e}^{n+1}}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}}{\dfrac{n!\,\mathrm{e}^{n}}{n^{n+\frac{1}{2}}}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)!}{n!}\,\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{n}}\,\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \ln\left(\cancel{(n+1)}\mathrm{e}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\cancel{1}+\frac{1}{2}}}\right) \\
&= \ln\left(\mathrm{e}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\right) \\
&= 1 + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\
&= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

D'après le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3 admis :

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= 1 - \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{3n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cancel{\frac{1}{2n}} - \frac{1}{4n^2} + \cancel{\frac{1}{6n^3}} + \cancel{\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)} \\
&= 1 + \frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien : } v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).}$$

b) D'après la question précédente :

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$$

et donc :

$$|v_{n+1} - v_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

On sait que la série $\sum \dfrac{1}{12n^2}$ converge par critère de Riemann. Ainsi, par critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum\ v_{n+1} - v_n$ converge absolument et donc converge.

Par télescopage, on en déduit que la suite (v_n) converge vers une limite que l'on note L.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \mathrm{e}^{v_n}$. Par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, il suit que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^L$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge et admet pour limite un réel strictement positif.}}$$

5. D'après le fait admis :

$$\frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$$

et donc :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}$$

D'après la question ***3.c)*** :

$$\begin{aligned}
I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1} 2^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n)!} &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n} 2^{2n} \frac{\left(\sqrt{2\pi}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}\right)^2}{\sqrt{2\pi}\frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{2n}}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\frac{1}{2n} \cancel{2^{2n}} \frac{\frac{n^{2n+1}}{\cancel{\mathrm{e}^{2n}}}}{\frac{2^{\cancel{2n}+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}}}{\cancel{\mathrm{e}^{2n}}}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\frac{1}{2n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}}
\end{aligned}$$