
Planche HEC : Réduction

Exercice avec préparation 1

On note I_4 la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

On définit l'ensemble \mathcal{E} par :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Question de cours : Énoncer la formule du binôme de Newton pour deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Justifier que \mathcal{E} est un espace vectoriel et en donner une base.
3. Écrire une fonction **Python** qui prend en entrée une matrice M de taille 4 et renvoie un message permettant de savoir si M appartient ou non à \mathcal{E} .
4. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $M_{a,b} \in \mathcal{E}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner une expression matricielle de $M_{a,b}^k$ en fonction de k , a et b .
5. Justifier que les matrices de \mathcal{E} sont simultanément diagonalisables, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ inversible telle que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, M = PDP^{-1},$$

où D est une matrice de taille 4 diagonale à déterminer. On donnera une expression matricielle de P .

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} A^i B^{k-i}$$

2. On a :

$$\mathcal{E} = \left\{ M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(I, J - I) = \text{Vect}(I, J)$$

$$\text{où } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que \mathcal{E} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et donc est un espace vectoriel.

De plus, la famille (I, J) est libre car constituée de deux matrices non colinéaires.

On en déduit que la famille (I, J) est une base de \mathcal{E} .

3. On propose la fonction **Python** suivante :

```

1  def appartenance(M):
2      a = M[0,0]
3      b = M[0,1]
4      N = (a-b) * np.eye(4) + b * np.ones([4,4])
5      compteur = 0
6      for i in range(4):
7          for j in range(4):
8              if M[i,j] == N[i,j]:
9                  compteur += 1
10     if compteur == 16:
11         print('La matrice est dans E')
12     else:
13         print('La matrice n\'est pas dans E')

```

4. Commençons par remarquer que $M_{a,b} = (a - b)I + bJ$. Les matrices I et J commutent donc on peut appliquer le binôme de Newton.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 M_{a,b}^k &= ((a-b)I + bJ)^k \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (a-b)^{k-i} I^{k-i} b^i J^i \\
 &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (a-b)^{k-i} b^i J^i \\
 &= (a-b)^k I + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (a-b)^{k-i} b^i 4^{i-1} J \quad (*) \\
 &= (a-b)^k I + \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^k \binom{k}{i} (a-b)^{k-i} (4b)^i \right) J \\
 &= (a-b)^k I + \frac{1}{4} \left((a-b+4b)^k - (a-b)^k \right) J \quad (\text{par binôme de Newton}) \\
 &= (a-b)^k I + \frac{1}{4} \left((a+3b)^k - (a-b)^k \right) J
 \end{aligned}$$

Détaillons la formule (*). On remarque que :

$$J^2 = 4J, \quad J^3 = J^2J = 4J^2 = 4^2J, \quad \dots$$

et on démontre par récurrence que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \quad J^i = 4^{i-1}J$$

5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et posons $M = M_{a,b} = (a-b)I + bJ$.

Si $b = 0$, alors $M = aI$ est un multiple de l'identité et tout vecteur non nul est un vecteur propre de M associé à la valeur propre a . Dans la suite on suppose $b \neq 0$.

Remarquons que M est symétrique donc diagonalisable. Déterminons une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M indépendants de a et b .

• Commençons par remarquer que :

$$\begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (a+3b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc le vecteur $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre $(a+3b)$.

• Ensuite, remarquons que

$$M - (a-b)I = bJ = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

donc $M - (a-b)I$ est une matrice de rang 1. Ainsi, $(a-b)$ est valeur propre de M .

Posons $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a :

$$(M - (a-b)I)X_2 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}, \quad (M - (a-b)I)X_3 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}, \quad (M - (a-b)I)X_4 = 0_{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}$$

et donc :

$$MX_2 = (a - b)X_2, \quad MX_3 = (a - b)X_3, \quad MX_4 = (a - b)X_4$$

La résolution d'un système linéaire montre facilement que la famille (X_1, X_2, X_3, X_4) est libre. Comme cette famille est de cardinal $4 = \dim(\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R}))$, il s'agit d'une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a donc trouvé une base de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de M . On pose alors :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} a+3b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}$$

de sorte que l'égalité

$$M = PDP^{-1}$$

soit valable pour toute matrice M de \mathcal{E} (on vérifie que l'égalité est toujours valable lorsque $b = 0$).