Planche HEC : applications linéaires

Exercice avec préparation 1

1. Question de cours.
Quel est le lien entre la continuité d'une fonction et sa dérivabilité ?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \mapsto \begin{cases} x \ln\big(|x|\big) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que la fonction $h : x \mapsto x\, g(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction h est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions g, $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x$. Ainsi :

$$F \; = \; \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, g)$$

a) Pour toute fonction f de F, on note $\Phi(f)$ la fonction dérivée de la fonction $x \mapsto x\, f(x)$.
Montrer que Φ définit un endomorphisme de F.

b) Prouver que la famille (f_0, f_1, g) est une base de F et trouver la matrice M de Φ dans cette base.

4. *a)* Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse.

b) En déduire une primitive de la fonction g.

c) Trouver une primitive de la fonction h.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.
Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.
La réciproque est fausse. Contre-exemple : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2. a)
- Par croissances comparées :
  - × $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$
  - × $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x \ln(-x) = \lim\limits_{x \to 0^-} -(-x) \ln(-x) = 0$

  Or : $g(0) = 0$.

  $\boxed{\text{Donc } g \text{ est continue en } 0.}$
- Sur $]0, +\infty[$, la fonction g coïncide avec la fonction $x \mapsto x \ln(x)$ donc g est continue sur $]0, +\infty[$.
- Sur $]-\infty, 0[$, la fonction g coïncide avec la fonction $x \mapsto x \ln(-x)$ donc g est continue sur $]-\infty, 0[$ par composition et produit.

  $\boxed{\text{Finalement : la fonction } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

b)
- La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ par produit et composition.
  - × Pour tout $x > 0$:
  $$h'(x) = g(x) + xg'(x) = x \ln(x) + x (\ln(x) + 1) = 2x \ln(x) + x$$
  - × Pour tout $x < 0$:
  $$h'(x) = g(x) + xg'(x) = x \ln(-x) + x (\ln(-x) + 1) = 2x \ln(-x) + x$$

  $\boxed{\text{Finalement : pour tout } x \neq 0, \ h'(x) = 2x \ln(|x|) + x.}$
- Étudions le taux d'accroissement de h en 0 :
  $$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \frac{xg(x)}{x} = g(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} g(0) = 0 \qquad \textit{(car } g \textit{ est continue en } 0\textit{)}$$

  $\boxed{\text{La fonction } h \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } h'(0) = 0.}$
- D'après ce qui précède, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
  $$h'(x) = 2g(x) + x$$
  Puisque g est continue sur $\mathbb{R}$, il suit que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c) Étudions le taux d'accroissement de h' en 0 :
$$\frac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} = \frac{2g(x) + x}{x} = 1 + 2 \ln(|x|) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\infty$$
Donc h' n'est pas dérivable en 0.

$\boxed{\text{On en déduit que } h \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

3. a)
- L'application Φ est linéaire par linéarité de la dérivation et du produit par une fonction.
- Puisque Φ est linéaire, il suffit maintenant de montrer que Φ envoie f_0, f_1 et g dans F. Pour cela, notons $h_0 : x \mapsto x f_0(x) = x$ et $h_1 : x \mapsto x f_1(x) = x^2$.
  Après calculs :
  $$h_0' = f_0, \qquad h_1' = 2f_1, \qquad h' = f_1 + 2g$$
  Or, $f_0 \in F$, $2f_1 \in F$ et $f_1 + 2g \in F$.
  Ceci prouve que F est stable par Φ.

$$\boxed{\text{L'application } \Phi \text{ est bien un endomorphisme de } F.}$$

b)
- Par définition de F, la famille (f_0, f_1, g) est une famille génératrice de F. Il reste à montrer que cette famille est libre.
- Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$. Supposons : $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu g = 0$. Alors :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_0 f_0(x) + \lambda_1 f_1(x) + \mu g(x) = 0$$
  × En évaluant en $x = 0$, on trouve : $\lambda_0 = 0$.
  × On a alors :
  $$\forall x \neq 0,\ \lambda_1 x + \mu x \ln(|x|) = 0$$
  En divisant par $x \neq 0$, on obtient :
  $$\forall x \neq 0,\ \lambda_1 + \mu \ln(|x|) = 0$$
  Supposons $\mu \neq 0$, alors :
  $$\forall x \neq 0,\ \ln(|x|) = -\frac{\lambda_1}{\mu}$$
  En faisant tendre x vers 0^+, on obtient une contradiction. Donc $\mu = 0$.
  × On a donc :
  $$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda_1 x = 0$$
  Ceci implique : $\lambda_1 = 0$.

  On a bien montré que la famille (f_0, f_1, g) est libre.

$$\boxed{\text{La famille } (f_0, f_1, g) \text{ est une base de } F.}$$

D'après les calculs effectués en question ***3.a)*** : $\Phi(f_0) = f_0$, $\Phi(f_1) = 2f_1$ et $\Phi(g) = f_1 + 2g$. Ainsi :

$$\boxed{M = \mathrm{Mat}_{(f_0,f_1,g)}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

4. a) La matrice M est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. On en déduit que M est inversible. On calcule ensuite M^{-1} par l'algorithme du pivot de Gauss matriciel.

$$\boxed{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

b) Par isomorphisme de représentation matricielle : $\Phi^{-1}(g) = -\dfrac{1}{4} f_1 + \dfrac{1}{2} g$.

Ceci signifie exactement que la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{4} x f_1(x) + \dfrac{1}{2} x g(x)$ est une primitive de g.

$$\boxed{\text{Autrement dit, la fonction } G : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ est une primitive de } g.}$$

c) Posons $k : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

La fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $k' = f_2 + 3h$ où $f_2 : x \mapsto x^2$.

On remarque que la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de f_2. Ainsi, on pose $H : x \mapsto \dfrac{1}{3}\left(k(x) - \dfrac{x^3}{3}\right)$ de sorte que $H' = h$.

$$\boxed{\text{La fonction } H : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{1}{9}x^3 + \dfrac{1}{3}x^3 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ est une primitive de } h.}$$