Colles de Mathématiques en E2A
Couples de v.a.r. discrètes
Semaine 10 : 17-21 novembre

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre IX : Couples

1.1 Définitions

- Couple de v.a.r. discrètes.
- Loi de probabilité du couple (X, Y) (ou loi conjointe des v.a.r. X et Y).
- Système complet d'événements associé à un couple de v.a.r. discrètes.
- Lois conditionnelles.
- Lois marginales.
- Indépendance de v.a.r. discrètes.
- Transformée d'un couple : $g(X, Y)$.
- Covariance de deux v.a.r. discrètes.
- Coefficient de corrélation linéaire.

1.2 Résultats

- Si (X, Y) est un couple de v.a.r. discrètes, alors la famille
$$([X = x] \cap [Y = y])_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$
est un sce (c'est le sce associé à (X, Y)) et on a
$$\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = 1$$
- Lien entre loi du couple, loi de X et lois conditionnelles de Y sachant les événements $[X = x]$.
- Lemme des coalitions.
- Théorème de transfert pour le calcul de l'espérance de $g(X, Y)$.
- Espérance d'un produit dans le cas général (thm de transfert) et dans le cas de l'indépendance.
- Formule de Koenig-Huygens pour la covariance. Propriétés de la covariance. Lien entre $\mathbb{V}(X + Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
- Variance d'une somme dans le cas de l'indépendance.
- Propriétés du coefficient de corrélation linéaire.

1.3 Méthodes

Pour déterminer la loi de (X,Y) :

- On commence par déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- On fixe $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, puis on décrit l'événement $[X = x] \cap [Y = y]$. Dans le cas fini, on pourra déterminer les issues qui réalisent cet événement.

Pour déterminer la loi de X à partir de la loi du couple (X,Y), on utilise la formule des probabilités totales pour écrire

$$\mathbb{P}([X = x]) \;=\; \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \,\cap\, [Y = y])$$

Pour déterminer la loi de X à partir de la loi de Y et des lois conditionnelles, on utilise la formule des probabilités totales pour écrire

$$\mathbb{P}([X = x]) \;=\; \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([Y = y])\; \mathbb{P}_{[Y=y]}([X = x])$$

Il faut savoir déterminer la loi d'une somme ou d'un produit de deux v.a.r. , toujours en appliquant la formule des probabilités totales.

Pour calculer $\mathbb{P}([X = Y])$, $\mathbb{P}([X < Y])$, $\mathbb{P}([X \leq Y])$, $\mathbb{P}([X > Y])$, $\mathbb{P}([X \geq Y])$, $\mathbb{P}([|X - Y| = k])$, $\mathbb{P}([X + Y = k])$, $\mathbb{P}([XY = k])$ ... le premier réflexe doit toujours être d'appliquer la FPT avec le SCE associé à l'une des deux variables aléatoires.

Pour calculer $\mathbb{P}([X \neq Y])$, on écrira $\mathbb{P}([X \neq Y]) = 1 - \mathbb{P}([X = Y])$.

2 Questions de cours

1. On considère un dé équilibré à 4 faces. On lance deux fois ce dé et on note
   - X la v.a.r. égale au plus petit des deux résultats
   - Y la v.a.r. égale au plus grand des deux résultats

   Déterminer la loi du couple (X,Y) en faisant une disjonction de cas et du dénombrement. Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit X et Y deux v.a.r. discrètes indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (avec $p \in \,]0,1[$). En utilisant un sce associé à X, montrer que pour tout $n \geq 2$:

   $$\mathbb{P}([X + Y = n]) \;=\; (n-1)\, p^2\, q^{n-2}$$

   (cf exo 5 TD)
3. Considérons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi conjointe est définie par :

   $$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{i + j}{\mathrm{e}\; 2^{i+j}\; i!\; j!}$$

   Calculer l'espérance de $Z = 2^{X+Y}$. (cf exo 11 TD)
4. Soient X_1, X_2 et X_3 indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$ où $p \in \,]0,1[$. Montrer que les v.a.r. $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes. (cf exo 12 TD)