DS4 (version A)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2. On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x \quad \text{et} \quad e_2(x) = x^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. ***a)*** Montrer que f est un endomorphisme de E.

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

2. ***a)*** Donner les valeurs propres de A, puis en déduire que A est diagonalisable.

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

c) On compile le script **Python** suivant :

```
A = np.array([[2,-2,0],[0,6,-6],[0,0,12]])
print(al.matrix_rank(A-6*np.eye(3)))
```

Donner la valeur affichée dans la console **Python** et justifier à l'aide de la question précédente.

3. ***a)*** Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.

4. ***a)*** Déterminer la matrice P^{-1}.

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \dfrac{1}{12} A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in \,]0,+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \mathrm{e} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.

2. Écrire une fonction **Python** `calculU(N)`, prenant en entrée un entier naturel N et renvoyant u_N.

3. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

7. Établir :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{et} \quad (x+1)\ \ln(x+1) \geqslant (x+1)$$

En déduire :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1,\ f'(x) \geqslant 0$$

8. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}-1 \leqslant u_n$$

9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

Exercice 3

1. *a)* Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

On note pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

b) Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$ est convergente.

On considère la fonction F définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t.$$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$.

4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$.
Montrer que $F(y) \leqslant F(x)$.
Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

5. *a)* Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t$.
On distinguera le cas $x = 0$ et le cas $x > 0$

b) Montrer que, pour tout réel x positif :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t$$

c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

d) À l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$ est convergente.

a) Montrer que :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t.$$

b) En déduire que :

$$0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2.$$

7. *a)* En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x).$$

b) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$.
En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F. On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 4

Les deux parties sont indépendantes

Partie I

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}\big([\Delta = 0]\big)$.

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}\big([X_1 - X_2 = n]\big) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X_2 = k]\big)\,\mathbb{P}\big([X_1 = n + k]\big)$.

b) En déduire : $\mathbb{P}\big([\Delta = n]\big) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

4. ***a)*** Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

6. ***a)*** En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big)\,\mathbb{P}\big([X_3 > k]\big)$.

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Partie II

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y et Z suivent toutes la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

7. ***a)*** Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, $\mathbb{P}([X + Y = k]) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket n+2, 2n \rrbracket$, $\mathbb{P}([X + Y = k]) = \dfrac{2n - k + 1}{n^2}$.

8. En déduire que :

$$\mathbb{P}([X + Y = Z]) = \frac{n-1}{n^2}$$

9. ***a)*** Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

b) Justifier que T est indépendante de X et de Y.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X + Y + Z = n + 1])$.