DS4 (version A) - correction

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1 (EDHEC 2004)

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x \quad \text{et} \quad e_2(x) = x^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

Démonstration.

- Montrons que $f(E) \subset E$.
  Soit $P \in E$.
  P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, *i.e.* il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = ax^2 + bx + c$. Donc, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$(x^2 - x)P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 - ax^3 - bx^2 - cx = ax^4 + (b - a)x^3 + (c - b)x^2 - cx$$

  Donc $x \mapsto (x^2 - x)P(x)$ est de degré au plus 4.
  Q est la dérivée seconde de ce polynôme. On a donc

$$Q(x) = f(P)(x) = 2P(x) + 2(2x - 1)P'(x) + (x^2 - x)P''(x)$$

  On remarque, comme P est de degré au plus 2,
  - $2P$ est de degré au plus 2,
  - P' est de degré au plus 1, donc $2(2X - 1)P'$ est de degré au plus 2,
  - P'' est de degré au plus 0, donc $(X^2 - X)P''$ est de degré au plus 2.

  Donc $f(P)$ est de degré au plus 2.
  D'où f est une application de E dans E.
- Montrons que f est une application linéaire.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(R, S) \in E^2$. Montrons que $f(\lambda R + S) = \lambda f(R) + f(S)$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{cl} & f(\lambda R + S)(x) \\ = & 2(\lambda R + S)(x) + 2(2x - 1)(\lambda R + S)'(x) + (x^2 - x)(\lambda R + S)''(x) \\ = & \lambda 2R(x) + 2S(x) + \lambda 2(2x - 1)R'(x) + 2(2x - 1)S'(x) \\ & +\lambda(x^2 - x)R''(x) + (x^2 - x)S''(x) \qquad \textit{(par linéarité de la dérivation)} \\ = & \lambda(2R(x) + 2(2x - 1)R'(x) + (x^2 - x)R''(x)) \\ & +(2S(x) + 2(2x - 1)S'(x) + (x^2 - x)S''(x)) \\ = & \lambda f(R)(x) + f(S)(x) \end{array}$$

  Donc $f(\lambda R + S) = \lambda f(R) + f(S)$.
  D'où f est une application linéaire.

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

□

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$(x^2 - x)e_0(x) = x^2 - x, \ (x^2 - x)e_1(x) = x^3 - x^2 \quad \text{et} \quad (x^2 - x)e_2(x) = x^4 - x^3$$

Donc
$$f(e_0)(x) = 2 = 2e_0(x), \ f(e_1)(x) = 6x - 2 = 6e_1(x) - 2e_0(x)$$

et
$$f(e_2)(x) = 12x^2 - 6x = 12e_2(x) - 6e_1(x)$$

D'où

$$\boxed{f(e_0) = 2e_0, \ f(e_1) = 6e_1 - 2e_0 \text{ et } f(e_2) = 12e_2 - 6e_1.}$$

□

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
D'après la question précédente, $f(e_0) = 2 \cdot e_0 + 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$. Donc $\mathrm{Mat}_B(f(e_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f(e_1) = -2 \cdot e_0 + 6 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$. Donc $\mathrm{Mat}_B(f(e_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$f(e_2) = 0 \cdot e_0 + -6 \cdot e_1 + 12 \cdot e_2$. Donc $\mathrm{Mat}_B(f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Finalement, la matrice de } f \text{ dans la base } B \text{ est } A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.}$$

□

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

Démonstration.
A est une matrice représentative de f. Or cette matrice est triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible. Donc f est bijectif.
On sait de plus d'après la question **1.a)** que f est un endomorphisme de E. D'où

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme de } E.}$$

□

2. a) Donner les valeurs propres de A, puis en déduire que A est diagonalisable.

Démonstration.
La matrice A est triangulaire supérieure. Donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux, *i.e.* $\mathrm{Sp}(A) = \{2, 6, 12\}$.
La matrice A possède 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

□

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

Démonstration.

-
$$(A - 2I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} - & 2y & & = & 0 \\ & 4y & - & 6z & = & 0 \\ & & & 10z & = & 0 \end{array}\right.$$

  De plus
$$\left\{\begin{array}{rcrcl} - & 2y & & = & 0 \\ & 4y & - & 6z & = & 0 \\ & & & 10z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

  Donc
$$\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right).}$$

-
$$(A - 6I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & 2y & & & = & 0 \\ & & & - & 6z & = & 0 \\ & & & & 8z & = & 0 \end{array}\right.$$

  De plus
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -4x & - & 2y & & & = & 0 \\ & & & - & 6z & = & 0 \\ & & & & 8z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

  Donc
$$\boxed{E_6(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).}$$

-
$$(A - 12I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -10 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -10x & - & 2y & & & = & 0 \\ & - & 6y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right.$$

  De plus
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} -10x & - & 2y & & & = & 0 \\ & - & 6y & - & 6z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 5x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{array}\right.$$

  Donc

$$\boxed{E_{12}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}\right).}$$

□

c) On compile le script **Python** suivant :

```
A = np.array([[2,-2,0],[0,6,-6],[0,0,12]])
print(al.matrix_rank(A-6*np.eye(3)))
```

Donner la valeur affichée dans la console **Python** et justifier à l'aide de la question précédente.

Démonstration. La console **Python** affiche la valeur 2. En effet, d'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(E_6(A)) + \text{rg}(A - 6I)$$

d'où $\text{rg}(A - 6I) = 3 - \dim(E_6(A))$. Or, d'après la question ***2.b***, la famille $\mathcal{F}_6 = \left(\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right)$:

- × engendre $E_6(A)$
- × est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

Donc la famille $\mathcal{F}_6$ est une base de $E_6(A)$ et $\dim(E_6(A)) = 1$. □

3. a) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 12\end{pmatrix}$.

Démonstration.
La matrice A est diagonalisable. Donc il existe une matrice P inversible obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres de A, et une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
D'après la question ***2b***,

$$\boxed{A = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & -5\\0 & 0 & 5\end{pmatrix} \text{ est inversible et } D = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 6 & 0\\0 & 0 & 12\end{pmatrix}.}$$

Commentaire

On aurait aussi pu rédiger de la manière suivante :
On pose la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -2 & -5\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$. Cette matrice est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. Elle est donc inversible. De plus $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}10 & 5 & 3\\0 & -5 & -5\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.
On remarque que $A = PDP^{-1}$.
À la lecture de l'énoncé, ce n'était cependant pas la rédaction à privilégier : on demande seulement en question **4.a)** de déterminer P^{-1}. Il faut cependant bien donner P^{-1} ici pour conclure, sinon vous risquez d'être accusé d'arnaque !

□

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$.

Démonstration.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie où $\mathcal{P}(n)$: $A^n = PD^nP^{-1}$.

- **Initialisation** : D'une part $A^0 = I_3$. D'autre part $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{array}{rcl} A^{n+1} & = & A \times A^n \\ & = & A \times PD^nP^{-1} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ & = & PDP^{-1} \times PD^nP^{-1} \quad \text{d'après la question } \mathbf{3.a)} \\ & = & PDPP^{-1}D^nP^{-1} \\ & = & PD \times D^nP^{-1} \\ & = & PD^{n+1}P^{-1} \end{array}$$

  Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence nous assure que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}.}$$

□

4. a) Déterminer la matrice P^{-1}.

Démonstration.
On applique la méthode de Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue l'opération $L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2$. on obtient

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow 5L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{cases}$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

On effectue les opérations $\begin{cases} L_1 \leftarrow \frac{1}{10}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{5}L_3 \end{cases}$. On obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \right.$$

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

$\square$

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \quad \text{d'après la question } \mathbf{3.b)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10\cdot 2^n & 5\cdot 2^n & 3\cdot 2^n \\ 0 & -5\cdot 6^n & -5\cdot 6^n \\ 0 & 0 & 2\cdot 12^n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\cdot 2^n & 5(2^n - 6^n) & 3\cdot 2^n - 5\cdot 6^n + 2\cdot 12^n \\ 0 & 10\cdot 6^n & 10(6^n - 12^n) \\ 0 & 0 & 10\cdot 12^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ A^n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\cdot 2^n & 5(2^n - 6^n) & 3\cdot 2^n - 5\cdot 6^n + 2\cdot 12^n \\ 0 & 10\cdot 6^n & 10(6^n - 12^n) \\ 0 & 0 & 10\cdot 12^n \end{pmatrix}.}$$

$\square$

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \dfrac{1}{12}A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $B = \dfrac{1}{12}A$, alors, par récurrence immédiate, $B^n = \dfrac{1}{12^n}A^n$. Donc

$$B^n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n & 5(\left(\frac{1}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n) & 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n - 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\cdot 1 \\ 0 & 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n & 10(\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1) \\ 0 & 0 & 10\cdot 1 \end{pmatrix}$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{6^n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$ car $\left|\dfrac{1}{6}\right| < 1$ et $\left|\dfrac{1}{6}\right| < 1$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$$

On remarque que $J^2 = J$.

$$\boxed{\text{La suite } (B^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tend vers la matrice } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ qui vérifie } J^2 = J.}$$

$\square$

Exercice 2 (ECRICOME 2014)

On considère la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0,+\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \mathrm{e} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0,+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.

Démonstration. Soit $x \in [0,+\infty[$.

× Si $x = 0$, alors $f(x) = 1 > 0$.

× Si $x > 0$, alors $1 + x > 1$ et par stricte croissance de ln sur $]0,+\infty[$, on a $\ln(1+x) > \ln(1) = 0$, d'où $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)} > 0$.

Finalement,

$$\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0,\ f(x) > 0.}$$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$
où $P(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ ».
<u>Initialisation</u> : $u_0 = \mathrm{e} > 0$ donc u_0 existe par définition. D'où $P(0)$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$. Montrons $P(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n > 0$. Donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe car f est définie sur $[0,+\infty[$. D'après ce qui précède, $u_{n+1} > 0$. D'où $P(n+1)$.
Par principe de récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe (et $u_n > 0$). □

2. Écrire un programme en **Python** qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.

Démonstration.

```
import numpy as np
N = int(input('Entrez un nombre entier N : '))
u = np.e
for i in range(N):
    u = u / np.log(1+u)
print(u)
```

□

3. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$.

Démonstration. Tout d'abord, sur $]0,+\infty[$, $f = \frac{f_1}{f_2}$ où

- $f_1 : x \mapsto x$ est continue sur $]0,+\infty[$
- $f_2 : x \mapsto \ln(1+x)$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$

donc f est continue sur $]0,+\infty[$.
De plus, on a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $\dfrac{x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln(1+x)} = 1$.
Autrement dit : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } [0,+\infty[.}$$

□

4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Démonstration. Le même raisonnement qu'à la question précédente (sur $]0,+\infty[$), en remplaçant « continue » par « de classe $\mathcal{C}^1$ », prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. □

5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

Démonstration. On sait que

- $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

Donc

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) - \frac{x}{1+x} &= x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - x\left(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \left(x - x^2 + x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}
\end{aligned}$$

On en déduit que : $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} \\
&\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

Démonstration. On sait déjà que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \frac{\dfrac{x}{\ln(1+x)}-1}{x} \\ &= \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}\end{aligned}$$

Or, $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $x - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$. D'où

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}$$

et donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$. Ceci prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.
D'après la question précédente : $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$. Donc f' est continue en 0. Conclusion :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,+\infty[.}$$

□

7. Établir :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{ et } \quad (x+1)\,\ln(x+1) \geqslant (x+1)$$

En déduire :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1,\ f'(x) \geqslant 0$$

Démonstration. Soit $x \geqslant \mathrm{e}-1$.
On a $1+x \geqslant \mathrm{e}$
donc $\ln(1+x) \geqslant 1$ par croissance de ln sur $]0,+\infty[$
donc $\frac{1}{\ln(1+x)} \leqslant 1$ par décroissance de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$
donc $\frac{x}{\ln(1+x)} \leqslant x$ car $x \geqslant 0$. D'où

$$\boxed{f(x) \leqslant x.}$$

D'autre part, $\ln(1+x) \geqslant 1$ donc $\boxed{(x+1)\ln(1+x) \geqslant x+1}$ car $x+1 \geqslant 0$.
Or,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} \\ &= \frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}\end{aligned}$$

et

- $(x+1)\ln(1+x) - x \geqslant 1$ d'après ce qui précède
- $(1+x)(\ln(1+x))^2 > 0$

donc $\boxed{f'(x) \geqslant 0}$. □

8. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{e}-1 \leqslant u_n$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$
où $P(n)$: « $\mathrm{e}-1 \leqslant u_n$ »
<u>Initialisation</u> : $u_0 = \mathrm{e}$ et $\mathrm{e}-1 \leqslant \mathrm{e}$. D'où $P(0)$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
Par hypothèse de récurrence : $\mathrm{e}-1 \leqslant u_n$.
D'après la question 7, f est croissante sur $[\mathrm{e}-1,+\infty[$, d'où $f(\mathrm{e}-1) \leqslant f(u_n)$.
Or, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\mathrm{e}-1) = \mathrm{e}-1$. D'où $P(n+1)$.
Par principe de récurrence, on a montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}-1 \leqslant u_n$. □

9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

Démonstration. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

- minorée par $\mathrm{e}-1$ d'après la question précédente.
- décroissante. En effet, d'après la question 7 : $\forall x \geqslant \mathrm{e}-1, \quad f(x) \leqslant x$.
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique cette inégalité à $x = u_n \geqslant \mathrm{e}-1$, on obtient $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant u_n$.

On en déduit, par théorème de convergence monotone, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L \geqslant \mathrm{e}-1$.
De plus,

- $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ par argument de suite extraite
- $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(L)$ par continuité de f en L (on a bien $L \geqslant 0$.)

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc par unicité de la limite : $L = f(L)$.
Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
x = f(x) &\iff x = \frac{x}{\ln(1+x)} \\
&\iff 1 = \frac{1}{\ln(1+x)} && \textit{(car } x \neq 0\textit{)} \\
&\iff \ln(1+x) = 1 \\
&\iff 1+x = \mathrm{e} \\
&\iff x = \mathrm{e}-1
\end{aligned}$$

On a $L = f(L)$ et $L > 0$ donc $\boxed{L = \mathrm{e}-1}$. □

Exercice 3 (ECRICOME 2025)

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

Démonstration.

- La fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est impropre en $+\infty$.
- Pour tout $t \geqslant 1$, $t^n \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$ et $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$.
- $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^{n+2}\mathrm{e}^{-t} = 0$ par croissances comparées donc $t^n\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.
- De plus, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge par critère de Riemann.

On en déduit, par critère de négligeabilité pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente.

□

On note pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

b) Calculer I_0 et I_1.

Démonstration.
Soit $B > 0$.

- On a :

$$\int_0^B t^0\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^B t^0\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^B = 1 - \mathrm{e}^{-B} \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'où : $I_0 = 1$.

- Procédons par intégration par parties (valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$) :

$$\left| \begin{array}{ll} u'(t) = \mathrm{e}^{-t} & u(t) = -\mathrm{e}^{-t} \\ v(t) = t & v'(t) = 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \int_0^B t^1\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^B t\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t & \\ &= \Big[-t\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^B - \int_0^B -\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= -B\mathrm{e}^{-B} - \Big[\mathrm{e}^{-t} \Big]_0^B \\ &= -B\mathrm{e}^{-B} - \mathrm{e}^{-B} + 1 \underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \end{aligned}$$

D'où : $I_1 = 1$.

Commentaire

On peut retrouver ces résultats en utilisant le cours sur les variables aléatoires à densité.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Alors, d'après le théorème de transfert :

$$I_0 = \mathbb{E}(X^0) = \mathbb{E}(1) = 1$$
$$I_1 = \mathbb{E}(X^1) = \mathbb{E}(X) = 1$$

□

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt$ est convergente.

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$.

- La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{1+xt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt$ est impropre en $+\infty$.
- Pour tout $t \geqslant 0$, $1 + xt \geqslant 1$ et donc, par décroissance de $u \mapsto \dfrac{1}{u}$ sur $]0, +\infty[$, $\dfrac{1}{1+xt} \leqslant 1$. Puisque $e^{-t} \geqslant 0$, il suit que :
$$0 \leqslant \frac{e^{-t}}{1+xt} \leqslant e^{-t}$$
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ converge (il s'agit de I_0).

$$\boxed{\text{On en déduit, par critère de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives, que l'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \text{ est convergente.}}$$

□

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt.$$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$.

Démonstration.

$$\boxed{\text{On a : } F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = I_0 = 1.}$$

□

4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$.
Montrer que $F(y) \leqslant F(x)$.
Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

Démonstration.
Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$. Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{array}{lll} & x \leqslant y & \\ \text{donc} & xt \leqslant yt & \textit{(car } t \geqslant 0\textit{)} \\ \text{donc} & 1+xt \leqslant 1+yt & \\ \text{donc} & \dfrac{1}{1+xt} \geqslant \dfrac{1}{1+yt} & \textit{(par décroissance de } u \mapsto \dfrac{1}{u} \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \text{donc} & \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt} \geqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+yt} & \textit{(car } e^{-t} \geqslant 0\textit{)} \end{array}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+yt}\mathrm{d}t$$

$$\boxed{\text{On a bien : } F(y) \leqslant F(x). \text{ Ainsi, la fonction } F \text{ est décroissante sur } [0,+\infty[.}$$

□

5. a) Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t$.
On distinguera le cas $x = 0$ et le cas $x > 0$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$. Deux cas se présentent.

- Si $x = 0$, alors :
$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1$$
- Si $x > 0$, alors :
$$\int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{x}{1+xt}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\left[\ \ln(1+xt)\ \right]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

□

b) Montrer que, pour tout réel x positif :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 0$. On a, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\mathrm{e}^{-t} \leqslant 1$$

et donc :

$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant \frac{1}{1+xt}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}\mathrm{d}t$$

□

c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

Démonstration.
Soit $x > 0$. On a, pour tout $t \geqslant 1$:

$$1 + xt \geqslant xt \geqslant x > 0$$

et donc :

$$0 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$\square$

d) À l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration.
Soit $x > 0$. D'après la relation de Chasles :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$$

Ainsi, d'après les questions ***5.a)***, ***5.b)*** et ***5.c)*** :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{x}I_0 = \frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{1}{x}$$

Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 0$. De plus : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Ainsi, par théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$. $\square$

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t$ est convergente.

a) Montrer que :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t = x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}\mathrm{d}t.$$

Démonstration.
Tout d'abord, les intégrales I_0 et I_1 étant convergentes, il suit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}(1-xt)\mathrm{d}t$ est convergente par linéarité de l'intégrale.

Ensuite :

$$\begin{aligned}
F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-t}}{1+xt} - e^{-t}(1-xt)\right) dt \qquad \textit{(par linéarité)} \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+xt} - (1-xt)\right) e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1-(1-xt)(1+xt)}{1+xt} e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1-(1-x^2t^2)}{1+xt} e^{-t}dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^2t^2}{1+xt} e^{-t}dt \\
&= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+xt} e^{-t}dt
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt.}$$

□

b) En déduire que :

$$0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2.$$

Démonstration.
Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
F(x) - I_0 + xI_1 &= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}dt + x\int_0^{+\infty} te^{-t}dt \\
&= F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt \qquad \textit{(par linéarité)} \\
&= x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt
\end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $t \geqslant 0$:

$$0 \leqslant \frac{t^2e^{-t}}{1+xt} \leqslant t^2e^{-t} \qquad \textit{(car } 1+xt \geqslant 1\textit{)}$$

et donc, par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \leqslant \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}dt = I_2$$

d'où (puisque $x^2 \geqslant 0$) :

$$0 \leqslant x^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt \leqslant x^2 I_2$$

$$\boxed{\text{On a bien : } 0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2.}$$

□

7. a) En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x).$$

Démonstration.
Rappelons que $I_0 = I_1 = 1$. Ainsi, d'après la question ***6.b)***, pour tout $x > 0$:

$$0 \leqslant F(x) - 1 + x \leqslant x^2 I_2$$

et donc :

$$0 \leqslant \frac{F(x) - 1 + x}{x} \leqslant x I_2$$

De plus : $\lim\limits_{x\to 0} x I_2 = 0$. D'après le théorème d'encadrement : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x) - 1 + x}{x} = 0$.
Autrement dit : $F(x) - 1 + x = \underset{x\to 0}{o}(x)$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{On a bien : } F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x)\text{. Par unicité du développement limité,}\\ \text{il s'agit bien du développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0 de } F.\end{array}}$$

□

b) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

Démonstration.
Soit $x > 0$. D'après la question ***3***, $F(0) = 1$. Ainsi :

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{F(x) - 1}{x} = \frac{-x + \underset{x\to 0}{o}(x)}{x} = -1 + \underset{x\to 0}{o}(1)$$

D'où :

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = -1$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F \text{ est dérivable en 0 et } F'(0) = -1.}$$

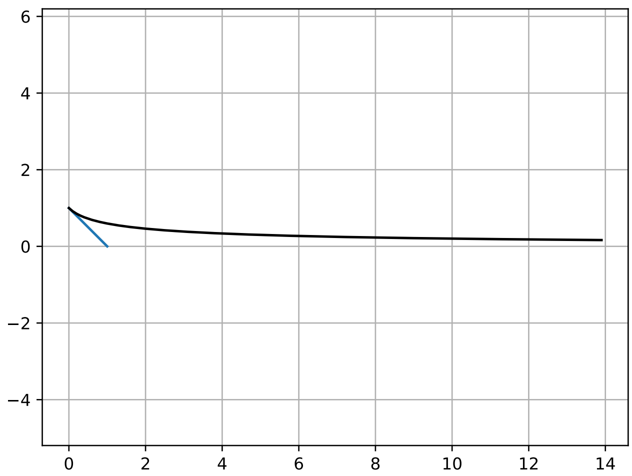
Commentaire

On peut aussi écrire que $F(x) - 1 = -x + \underset{x\to 0}{o}(x)$ donc $F(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} -x$ pour arriver au même résultat.

□

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.
En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F. On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0.

Démonstration.
D'après la question précédente, le graphe de F admet une tangente en 0, d'équation $y = -x + 1$.
On sait de plus que la fonction F est décroissante sur $[0, +\infty[$ et que $F(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, la courbe admet une asymptote horizontale en $+\infty$ (qui coïncide avec l'axe des abscisses). □



Exercice 4

Les deux parties sont indépendantes

Partie I (EML 2010)

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1 - p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.
On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

Démonstration.
D'après l'énoncé, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. Autrement dit :

× $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

× $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\ q^{k-1}$.

$$\boxed{\text{Enfin : } \mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X_1) = \frac{q}{p^2}.}$$ □

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

Démonstration.

- Tout d'abord : $[\Delta = 0] \ = \ [|X_1 - X_2| = 0] \ = \ [X_1 - X_2 = 0]$.

- La famille $([X_2 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
  Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = 0]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 = k]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\ \mathbb{P}([X_1 = k]) && \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1}\ p\ q^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} (q^2)^{k-1} \\
&= p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^{k} \ = \ p^2\ \frac{1}{1-q^2} && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in\ ]-1,1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}}\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}(1+q)} \ = \ \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 = X_2]) = \frac{p}{1+q}}$$

□

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\,\mathbb{P}([X_1 = n+k])$.

Démonstration.
La famille $([X_2 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \ \cap \ [X_1 - X_2 = n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \ \cap \ [X_1 = k + n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = k + n]) \quad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ = \ \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\ \mathbb{P}([X_1 = k + n])}$$

□

b) En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$[\Delta = n] \ = \ [\ |X_1 - X_2| = n] \ = \ [X_1 - X_2 = n] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -n]$$

- Comme $n \neq 0$, les événements $[X_1 - X_2 = n]$ et $[X_1 - X_2 = -n]$ sont incompatibles.
Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\ |X_1 - X_2| = n]) &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ + \ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = -n]) \\
&= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) \ + \ \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])
\end{aligned}$$

- Reprenons le calcul de la question précédente.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_1 = k + n]) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1} \ \times \ p\ q^{k+n-1} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k-2} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} \\
&= p^2\ q^n \sum_{k=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k} \quad \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= p^2\ q^n\ \frac{1}{1-q^2} \quad \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= p^{\cancel{2}}\ q^n\ \frac{1}{\cancel{(1-q)}\ (1+q)} \ = \ \frac{p\ q^n}{1+q}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big(\,[X_1 - X_2 = n]\,\big) = \frac{p\,q^n}{1+q}}$$

- On vient de démontrer que pour tout couple (U, V) de v.a.r. indépedantes et de même loi géométrique on a :

$$\mathbb{P}([U - V = n]) = \frac{p\, q^n}{1+q}$$

$$\boxed{\text{En choisissant } U = X_2 \text{ et } V = X_1\text{, on obtient : } \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) = \frac{p\, q^n}{1+q}.}$$

- Et ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([\ \Delta = n]) &= \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) + \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) \\ &= 2\ \mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = 2\ \frac{p\, q^n}{1+q} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}([\ \Delta = n]) = 2\ \frac{p\, q^n}{1+q}.}$$

Commentaire

- Lorsque deux v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi, on a évidemment, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{P}\big(\,[a \leqslant X_1 \leqslant b]\,\big) = \mathbb{P}\big(\,[a \leqslant X_2 \leqslant b]\,\big)$$

Ce type de résultat est vérifié pour tout événement écrit avec une seule v.a.r. (on peut alors remplacer X_1 par X_2).

- Lorsque l'on travaille sur une somme de v.a.r. , il faut faire attention. De manière générale :

$$\mathbb{P}([X_1 + X_2 = n]) \cancel{=} \mathbb{P}([X_1 + X_1 = n]) = \mathbb{P}([\ 2\, X_1 = n])$$

On ne peut remplacer la v.a.r. X_2 par la v.a.r. X_1 déjà présente dans l'expression. Par contre, si on dispose d'une autre v.a.r. X_3 elle aussi de même loi que X_1 et X_2, on peut écrire :

$$\mathbb{P}([X_1 + X_2 = n]) = \mathbb{P}([X_1 + X_3 = n])$$

Cela peut être vu comme un renommage de la v.a.r. considéré.

- C'est cette idée qui nous a permis d'établir l'égalité :

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])$$

Il était aussi possible d'effectuer le calcul de $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = n])$ en mettant en place de nouveau la rédaction à l'aide de la formule des probabilités totales.
La famille $([X_1 = k])_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 - X_1 = n]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = k + n]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_1 = k]) \times \mathbb{P}([X_2 = k + n]) \qquad \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p\ q^{k-1} \times p\ q^{k+n-1} = \frac{p\, q^n}{1+q} \end{aligned}$$

□

4. a) Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

Démonstration.

- Tout d'abord : $\Delta = |X_1 - X_2| \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{Les v.a.r. } X_1 \text{ et } X_2 \text{ étant à valeurs entières, } \Delta(\Omega) \subset \mathbb{N}.}$$

- La v.a.r. Δ admet une espérance si et seulement si la série $\sum n\, \mathbb{P}\big([\Delta = n]\big)$ est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.
- Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{k=0}^{N} k\, \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k\, \mathbb{P}\big([\Delta = k]\big) & \\
& = & \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k\, \frac{2\, p\, q^k}{1+q} & \textit{(d'après la question précédente et car } k \geqslant 1\textit{)} \\
& = & \displaystyle 2\, \frac{p\, q}{1+q} \sum_{k=1}^{N} k\, q^{k-1} & \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 2\, \frac{\cancel{p}\, q}{1+q}\, \frac{1}{(1-q)^{\cancel{2}}}
\end{array}$$

La limite est obtenue en reconnaissant la somme partielle d'ordre N d'une série géométrique dérivée première de raison $q \in \,]-1, 1[$.
On en déduit que Δ admet une espérance.

$$\boxed{\text{De plus : } \mathbb{E}(\Delta) = \frac{2\, q}{(1+q)(1-q)}.}$$

□

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\, \mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$(X_1 - X_2)^2 \;=\; {X_1}^2 - 2\, X_1 X_2 + {X_2}^2$$

La v.a.r. $(X_1 - X_2)^2$ admet une espérance car elle est la combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une. Plus précisément :

× ${X_1}^2$ (resp. ${X_2}^2$) admet une espérance car X_1 suit une loi géométrique et admet donc un moment d'ordre 2.

× $X_1\, X_2$ admet une espérance car X_1 et X_2 admettent toutes les deux un moment d'ordre 2.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } (X_1 - X_2)^2 \text{ admet une espérance.}}$$

- De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) & = & \mathbb{E}\big({X_1}^2 - 2\, X_1 X_2 + {X_2}^2\big) & \\
& = & \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1 X_2\big) + \mathbb{E}\big({X_2}^2\big) & \textit{(par linéarité de l'espérance)} \\
& = & \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1\big)\, \mathbb{E}\big(X_2\big) + \mathbb{E}\big({X_2}^2\big) & \textit{(car les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ sont indépendantes)} \\
& = & \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - 2\, \mathbb{E}\big(X_1\big)\, \mathbb{E}\big(X_1\big) + \mathbb{E}\big({X_1}^2\big) & \textit{(les v.a.r. } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi donc } \mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) \textit{ et } \mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)\textit{)} \\
& = & 2\, \Big(\mathbb{E}\big({X_1}^2\big) - \mathbb{E}\big(X_1\big)^2\Big) \;=\; 2\, \mathbb{V}(X_1) &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{E}\big((X_1 - X_2)^2\big) \;=\; 2\, \mathbb{V}(X_1)}$$

Commentaire

On pouvait aussi faire ce calcul de la façon ci-dessous.

- Tout d'abord, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_1 - X_2) \;=\; \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) \;=\; 0$$

car X_1 et X_2 ont même loi.

- Ainsi :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{E}\left((X_1 - X_2)^2\right) & = & \mathbb{V}(X_1 - X_2) + \cancel{(\mathbb{E}(X_1 - X_2))^2} & \textit{(par formule de Koenig-Huygens)} \\
& = & \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(-X_2) & \textit{(par indépendance de } X_1 \textit{ et } X_2\textit{)} \\
& = & \mathbb{V}(X_1) + (-1)^2\, \mathbb{V}(X_2) & \\
& = & 2\, \mathbb{V}(X_1) & \textit{(car } X_1 \textit{ et } X_2 \textit{ ont même loi)}
\end{array}$$

- Remarquons alors : $\Delta^2 = |X_2 - X_1|^2 = (X_2 - X_1)^2$.
  On en conclut, d'après le point précédent, que la v.a.r. Δ admet un moment d'ordre 2.
  De plus :

$$\begin{array}{rcll}
\mathbb{V}(\Delta) & = & \mathbb{E}(\Delta^2) - \big(\mathbb{E}(\Delta)\big)^2 & \textit{(par la formule de Kœnig-Huygens)} \\
& = & 2\, \mathbb{V}(X_1) - \left(\dfrac{2\, q}{(1+q)\,(1-q)}\right)^2 & \\
& = & 2\, \dfrac{q}{p^2} - \dfrac{4\, q^2}{(1+q)^2\,(1-q)^2} & \textit{(car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)\textit{)} \\
& = & \dfrac{2\, q}{p^2} \left(1 - \dfrac{2\, q}{(1+q)^2}\right) & \\
& = & \dfrac{2\, q}{p^2}\, \dfrac{(1+q)^2 - 2\, q}{(1+q)^2} \;=\; \dfrac{2}{p^2}\, \dfrac{(1 + \cancel{2q} + q^2) - \cancel{2q}}{(1+q)^2} &
\end{array}$$

$$\boxed{\mathbb{V}(\Delta) \;=\; 2\, \dfrac{q\,(1+q^2)}{p^2\,(1+q)^2}}$$

□

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord :

$$A \ = \ [\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)] \ = \ [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)]$$

- Démontrons alors : $\Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$.
  Soit $\omega \in \Omega$.

$$\begin{array}{rcl} \Delta(\omega) & = & |X_2(\omega) - X_1(\omega)| \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} X_2(\omega) - X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \geqslant X_1(\omega) \\ X_1(\omega) - X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) < X_1(\omega) \end{array} \right. \\ & = & \max\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) - \min\big(X_1(\omega), X_2(\omega)\big) \\ & = & \big(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\big)(\omega) \end{array}$$

  On a donc démontré :

$$\forall \omega \in \Omega, \ \Delta(\omega) = \big(\max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)\big)(\omega)$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2).}$$

$$\boxed{\text{Et : } A \ = \ [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)] \ = \ [X_3 > \Delta].}$$

Commentaire

- On rappelle qu'une v.a.r. X est une **application** de Ω dans $\mathbb{R}$. Ainsi, démontrer l'égalité de deux v.a.r. ($X = Y$) c'est démontrer que ces deux **applications** sont égales en tout point. Plus précisément :
$$X = Y \;\Leftrightarrow\; \forall \omega \in \Omega,\; X(\omega) = Y(\omega)$$
Au passage :
  × lorsque l'on note $X = 5$, cela signifie que la v.a.r. X est la v.a.r. constante égale à 5 (la propriété : $\forall \omega \in \Omega,\; X(\omega) = 5$ est vérifiée).
  × lorsqu'on écrit « la v.a.r. X prend la valeur 5 si ... » signifie qu'il **existe** (au moins) un tirage $\omega \in \Omega$ pour lequel $X(\omega) = 5$.

  Il existe malheureusement des énoncés dans lesquels ces deux expressions sont confondues. Ce ne devrait pas être le cas : il n'y a pas lieu de confondre les symboles $\forall$ et $\exists$.
- On trouvera dans certains corrigés une disjonction de cas du type :

  × ~~Si $X_1 > X_2$: alors $\max(X_1, X_2) = X_1$ et $\min(X_1, X_2) = X_2$ ...~~
  × ~~Si $X_1 \leqslant X_2$: alors $\max(X_1, X_2) = X_2$ et $\min(X_1, X_2) = X_1$ ...~~

  Cette disjonction de cas n'a pas de sens.
  Pour comprendre pourquoi ce n'est pas le cas, il faut avoir bien saisi la différence entre la relation d'ordre opérant sur les réels et celle opérant sur les applications.
  × Lorsque a et b sont des réels, on a :
$$a \leqslant b \quad \texttt{OU} \quad a > b$$
  On dit que la relation d'ordre $\leqslant$ définie sur les réels est une relation d'ordre **totale** : on peut toujours comparer deux réels.
  × La relation d'ordre sur les v.a.r. est elle aussi notée $\leqslant$ et est définie par :
$$X_1 \leqslant X_2 \;\Leftrightarrow\; \forall \omega \in \Omega,\; X_1(\omega) \leqslant X_2(\omega)$$
  Cette relation d'ordre n'est pas **totale**. Autrement dit, il existe des v.a.r. X_1 et X_2 qui ne sont pas comparables par la relation $\leqslant$. Plus précisément, dès qu'il existe deux tirages $\omega_1 \in \Omega$ et $\omega_2 \in \Omega$ tels que :
$$X_1(\omega_1) \leqslant X_2(\omega_1) \quad \text{et} \quad X_1(\omega_2) > X_2(\omega_2)$$
  alors aucune des relations : $X_1 \leqslant X_2$ et $X_1 > X_2$ n'est vérifiée puisque chacune de ces deux inégalités définie une propriété qui doit être vérifiée **pour tout** ω.

  La relation d'ordre définie sur les v.a.r. est dite **partielle** (on ne peut pas comparer tous les v.a.r.). La disjonction de cas présentée plus haut fait l'hypothèse forte que l'on peut comparer les v.a.r. X_1 et X_2. Cette hypothèse n'est pas raisonnable et une telle disjonction n'a donc pas lieu d'être.

6. a) En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k])\, \mathbb{P}([X_3 > k])$.

Démonstration.
La famille $([\Delta = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k] \ \cap \ [X_3 > \Delta]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k] \ \cap \ [X_3 > k]) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > k]) \qquad \textit{(car } \Delta \textit{ et } X_3 \textit{ sont indépendantes)}
\end{aligned}$$

L'indépendance de X_3 et Δ est une conséquence du lemme des coalitions : comme X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes, les v.a.r. $|X_2 - X_1|$ et X_3 sont indépendantes.

$$\boxed{\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > k])}$$

□

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

Démonstration.

- D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) \ = \ \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > k])$$

- Or :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\Delta = 0]) \ \times \ \mathbb{P}([X_3 > 0]) &= \mathbb{P}([\Delta = 0]) \ \times \ 1 \qquad \textit{(car } [X_3 > 0] = \Omega \textit{ puisque } X_3(\Omega) = \mathbb{N}^* \textit{)} \\
&= \frac{p}{1+q} \qquad \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{2.}}\textit{)}
\end{aligned}$$

- Et, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathbb{P}([X_3 > k]) \ = \ q^k$.

Commentaire

- On utilise ici ce résultat sans donner la démonstration car elle n'est pas exigée par l'énoncé (ce qui arrive parfois).
- Il faut savoir démontrer cette propriété.
  Pour ce faire, démontrons tout d'abord :

$$\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}\Big(\overline{[X > k]}\Big) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k])$$

  Par ailleurs : $[X \leqslant k] \ = \ \bigcup\limits_{i=1}^{k} \ [X = i]$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X \leqslant k]) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \ [X = i]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}\left([X = i]\right) \qquad \textit{(par incompatibilité)} \\
&= \sum_{i=1}^{k} p \ q^{i-1} \ = \ p \sum_{i=0}^{k-1} q^i \ = \ p \ \frac{1-q^k}{1-q} \ = \ 1 - q^k
\end{aligned}$$

  Enfin : $\mathbb{P}([X > k]) \ = \ 1 - \mathbb{P}([X \leqslant k]) \ = \ 1 - (1 - q^k) \ = \ q^k$.

- On en conclut :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \times \mathbb{P}([X_3 > k]) \\
&= \mathbb{P}([\Delta = 0]) \times \mathbb{P}([X_3 > 0]) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \times \mathbb{P}([X_3 > k]) \\
&= \frac{p}{1+q} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\,p\,q^k}{1+q} \times q^k \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \sum_{k=1}^{+\infty} q^{2k} \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (q^2)^k - 1 \right) \\
&= \frac{p}{1+q} + 2\,\frac{p}{1+q} \left(\frac{1}{1-q^2} - 1 \right) && \textit{(en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison } q^2 \in \,]-1,1[\textit{)} \\
&= \frac{p}{1+q} \left(1 + 2\,\frac{\cancel{1} - (\cancel{1} - q^2)}{1-q^2} \right) \\
&= \frac{p}{1+q}\,\frac{1 - q^2 + 2q^2}{1-q^2} \\
&= \frac{p}{1+q}\,\frac{1+q^2}{1-q^2} = \frac{\cancel{1-q}}{1+q}\,\frac{1+q^2}{\cancel{(1-q)}(1+q)} = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } \mathbb{P}\big(\,[X_3 > \Delta]\,\big) = \frac{1+q^2}{(1+q)^2}.}$$

□

Partie II (EDHEC 1999)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y et Z suivent toutes la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

7. a) Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$, $\mathbb{P}([X + Y = k]) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

Démonstration.
Soit $k \in \llbracket 2, n+1 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = i])_{i \in \llbracket 1,n \rrbracket}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X + Y = k]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X + Y = k] \cap [X = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y = k - i] \cap [X = i]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y = k - i])\mathbb{P}([X = i]) && \textit{(par indépendance)} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}([Y = k - i])\mathbb{P}([X = i])
\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{cases} 1 \leqslant k-i \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \iff \begin{cases} k-n \leqslant i \leqslant k-1 \\ 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

$$\iff 1 \leqslant i \leqslant k-1 \qquad \textit{(car } k-n \leqslant 1,\ k-1 \leqslant n \textit{ et } 1 \leqslant k-1\textit{)}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([X+Y=k]) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{k-1}{n^2}.}$$

□

b) Montrer que, pour tout $k \in [\![n+2, 2n]\!]$, $\mathbb{P}([X+Y=k]) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

Démonstration.
Soit $k \in [\![n+2, 2n]\!]$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X=i])_{i \in [\![1,n]\!]}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X+Y=k]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X+Y=k] \cap [X=i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y=k-i] \cap [X=i]) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y=k-i])\mathbb{P}([X=i]) && \textit{(par indépendance)} \\ &= \sum_{i=k-n}^{n} \mathbb{P}([Y=k-i])\mathbb{P}([X=i]) \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{cases} 1 \leqslant k-i \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \iff \begin{cases} k-n \leqslant i \leqslant k-1 \\ 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

$$\iff k-n \leqslant i \leqslant n \qquad \textit{(car } k-n \geqslant 2,\ k-1 \geqslant n+1 \textit{ et } k-n \leqslant n\textit{)}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([X+Y=k]) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{n-(k-n)+1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}.}$$

□

8. En déduire que :

$$\mathbb{P}([X+Y=Z]) = \frac{n-1}{n^2}$$

Démonstration.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Z = k])_{k \in [\![1,n]\!]}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X+Y=Z]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X+Y=Z] \cap [Z=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X+Y=k] \cap [Z=k]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X+Y=k])\mathbb{P}([Z=k]) && \textit{(Z et X + Y sont indépendantes d'après le lemme des coalitions)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X+Y=k]) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \mathbb{P}([X+Y=k]) && \textit{(car } [X+Y=1]=\varnothing\textit{)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n^2} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{1.a)}}\textit{)} \\
&= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1} k \\
&= \frac{1}{n^3} \times \frac{(n-1)n}{2} \\
&= \frac{n-1}{2n^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathbb{P}([X+Y=Z]) = \frac{n-1}{2n^2}.}$$

□

9. a) Montrer que la variable aléatoire $T = n + 1 - Z$ suit la loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

Démonstration.

- Tout d'abord, on a bien : $T(\Omega) = [\![1,n]\!]$.
  En effet, T prend la valeur 1 lorsque Z prend la valeur n et T prend la valeur n lorsque Z prend la valeur 1.
- Soit $k \in [\![1,n]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([T=k]) &= \mathbb{P}([n+1-Z=k]) \\
&= \mathbb{P}([Z=n+1-k]) \\
&= \frac{1}{n} && \textit{(car } n+1-k \in [\![1,n]\!]\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } T \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!]).}$$

□

b) Justifier que T est indépendante de X et de Y.

Démonstration.
Question mal posée, on la fait directement dans la question suivante. □

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X+Y+Z=n+1])$.

Démonstration.
On remarque que :

$$\mathbb{P}([X+Y+Z=n+1]) = \mathbb{P}([X+Y=n+1-Z]) = \mathbb{P}([X+Y=T])$$

De plus, d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires T et $X+Y$ sont indépendantes. On peut alors faire le même calcul qu'en question ***2***.

$$\boxed{\text{D'où : } \mathbb{P}([X+Y+Z=n+1]) = \frac{n-1}{2n^2}.}$$

□