DS4 (version B) - barème (ESSEC II 2024)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

On s'intéresse dans ce problème à l'énergie d'un graphe qui est définie à partir de l'énergie de sa matrice d'adjacence.

L'énergie d'un graphe a été introduite en 1978 par Ivan Gutman. Ce n'est qu'à partir des années 2000 que des recherches approfondies sur cette notion ont été entreprises.

Aujourd'hui plus de deux articles par semaine sont publiés sur l'énergie des graphes avec de nombreuses applications dans divers domaines scientifiques.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes et un bref aide-mémoire Python se trouve en page 6.

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 2.

On rappelle que la notation $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est analogue à la notation $\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Partie 1 - Énergie et trace d'une matrice

1. Soit A une matrice carrée symétrique appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence d'une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Que peut-on dire des éléments diagonaux de $P^{-1}AP$?

- **1 pt : la matrice A est symétrique (réelle) donc est diagonalisable**
- **1 pt : la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A**

► *En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$, on pose alors $\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, on nomme ce réel positif l'énergie de A.*
On admet que cette somme ne dépend pas du choix de P.

2. Montrer que $\mathcal{E}(A) = 3$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)(2-\lambda) \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$
- **1 pt :** $\mathcal{E}(A) = |-1| + |0| + |2| = 1 + 2 = 3$

3. Ecrire une fonction **Python** `energie(A)` qui renvoie l'énergie de la matrice symétrique représentée par le tableau `numpy A`.

```
def energie(A)
    D = al.eigvals(A) # tableau des valeurs propres de A
    return np.sum(np.abs(D))
```

- **1 pt :** `D = al.eigvals(A)`
- **2 pt :** `return np.sum(np.abs(D))`

► *Si $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A, notée $\mathrm{tr}(A)$ par :*

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

4. Notons $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

a) Montrer que : $\operatorname{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \right) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{j,i}$.

- **1 pt : $AB = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:**

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

- **1 pt : calcul de $\operatorname{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,i}$**

b) En déduire que : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ et $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2$.

Que peut-on dire de A si $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$?

- **1 pt : $\operatorname{tr}(AB) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j} b_{j,i} = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} b_{j,i} a_{i,j} = \sum\limits_{1\leqslant j,i\leqslant n} b_{j,i} a_{i,j} = \operatorname{tr}(BA)$**
- **1 pt : $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{j,i}^2$**
- **1 pt : une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls**
- **1 pt : si $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$, alors $A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$**

c) Si A et B sont semblables, montrer que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

- **1 pt : il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$**
- **1 pt : $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\Big((PB)P^{-1}\Big) = \operatorname{tr}\Big(P^{-1}(PB)\Big) = \operatorname{tr}(B)$**

5. Dans cette question $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est symétrique et on utilise les notations de la question *1*.

- **1 pt : il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$**
- **1 pt : $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\Big((PB)P^{-1}\Big) = \operatorname{tr}\Big(P^{-1}(PB)\Big) = \operatorname{tr}(B)$**

a) Montrer que $|\operatorname{tr}(A)| \leqslant \mathcal{E}(A)$.

- **1 pt : on pose $D = P^{-1}AP$ et on a $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(D) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$ car A et D sont semblables**
- **1 pt : par inégalité triangulaire :**

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$$

b) Justifier que $\operatorname{tr}(A^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

- **1 pt : $A^2 = PD^2P^{-1}$**
- **1 pt : $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(D^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$**

6. Dans la console **Python**, on obtient :

```
>>> energie(3*np.eye(3)-np.ones([3,3]))
6.0
```

a) Déterminer quelle est la matrice A associée au tableau `3*np.eye(3)-np.ones([3,3])`.

- **1 pt : $A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$**

b) En calculant $\operatorname{tr}(A)$, $\operatorname{tr}(A^2)$ et en déterminant une valeur propre évidente de A, expliciter son spectre et retrouver son énergie.

- **1 pt :** $\operatorname{tr}(A) = 6$
- **1 pt :** $\operatorname{tr}(A^2) = 18$
- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **et puisque** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$**, on en déduit que** 0 **est valeur propre de** A**.**
- **1 pt : la matrice** A **étant symétrique, elle est diagonalisable et admet** 3 **valeurs propres (comptées avec multiplicité). Notons** α **et** β **les deux valeurs propres restantes**
- **1 pt : on se ramène à résoudre** $\alpha^2 + (6-\alpha)^2 = 18$
- **1 pt :** $\alpha^2 + (6-\alpha)^2 = 18 \iff \alpha = 3$
- **1 pt :** $\operatorname{Sp}(A) = \{0, 3\}$
- **1 pt : la valeur propre** 3 **apparaît deux fois donc** $\mathcal{E}(A) = |0| + |3| + |3| = 6$

Partie 2 - Produit de Kronecker $2 \times n$ de matrices symétriques

- Soit $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique et A une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.
  On définit $U * A$ la matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ que l'on peut naturellement représenter ainsi $\begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix}$ (écriture par blocs).

- Par exemple, si $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $U * A = \begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 0_3 \end{pmatrix}$ par blocs,

  d'où $U * A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (0_3 désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

- Si X est une matrice colonne appartenant à $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$.

  On admet qu'alors la matrice colonne $(U * A)X$ de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ est égale à $\begin{pmatrix} uAX_1 + vAX_2 \\ vAX_1 + wAX_2 \end{pmatrix}$.

7. *a)* Écrire une fonction **Python** `prod2K(u,v,w,A)` qui étant donné $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ et A, représentée par un tableau `numpy`, renvoie $U * A$ sous la forme d'un tableau `numpy`.

```
def prod2K(u,v,w,A):
    n = len(A) # taille de la matrice A
    K = np.zeros([2*n,2*n]) # K sera la matrice U*A
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            K[i,j] = u * A[i,j] # partie en haut à gauche
            K[i+n,j] = v * A[i,j] # partie en bas à gauche
            K[i,j+n] = v * A[i,j] # partie en haut à droite
            K[i+n,j+n] = w * A[i,j] # partie en bas à droite
    return K
```

- **1 pt :** `n = len(A)`
- **1 pt :** `K = np.zeros([2*n,2*n])`
- **4 pt : double boucle `for` imbriquée**

b) Compléter le code suivant s'affichant dans la console **Python** :

```
>>> prod2K(...,-1,...,...)
array([[-2., 1., 2., -1.],
       [1., -2., -1., 2.],
       [2., -1., -4., 2.],
       [-1., 2., 2., -4.]])
```

- **3 pt :** `prod2K(1,-1,2,np.array([[-2,1],[1,-2]]))`

8. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre de U pour la valeur propre λ et X un vecteur propre de A pour μ. On pose $Y = \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$.

a) Établir l'égalité : $(U * A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$.

- **1 pt :** $(U * A)Y = \begin{pmatrix} uA(aX) + vA(bX) \\ vA(aX) + wA(bX) \end{pmatrix}$
- **1 pt : X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ**
- **1 pt : fin du calcul**

b) Montrer que Y est un vecteur propre de $U * A$ et préciser pour quelle valeur propre.

- **1 pt : Y n'est pas le vecteur nul**
- **1 pt :** $ua + vb = \lambda a$ **et** $va + wb = \lambda b$
- **1 pt :** $(U * A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} \lambda aX \\ \lambda bX \end{pmatrix} = \mu\lambda \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix} = \mu\lambda Y$ **donc Y est un vecteur propre de $U * A$ pour la valeur propre $\mu\lambda$**

9. *a)* Justifier l'existence d'une base $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$ de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et de $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de U et A respectivement.

- **1 pt : les matrices U et A sont symétriques donc diagonalisables**

► *On note γ_1 et γ_2 les valeurs propres associées à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ respectivement et $\mu_1, \ldots, \mu_n$ celles associées à $X_1, \ldots, X_n$ respectivement.*
On pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i = \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix}$ et $Z_i = \begin{pmatrix} cX_i \\ dX_i \end{pmatrix}$.

b) Montrer que la famille $(Y_1, Z_1, \ldots, Y_n, Z_n)$ est libre.

- **1 pt : définition de la liberté bien écrite**
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i Y_i + \sum\limits_{i=1}^{n} z_i Z_i = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} (ay_i + cz_i) X_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (by_i + dz_i) X_i \end{pmatrix}$
- **1 pt : par liberté de la famille** $(X_1, \ldots, X_n)$**, on a :**

$$\forall i \in [\![1, n]\!], ay_i + cz_i = 0 \qquad \textbf{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], by_i + dz_i = 0$$

- **1 pt : traduction en** $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **et preuve du fait que la matrice** $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ **est inversible**

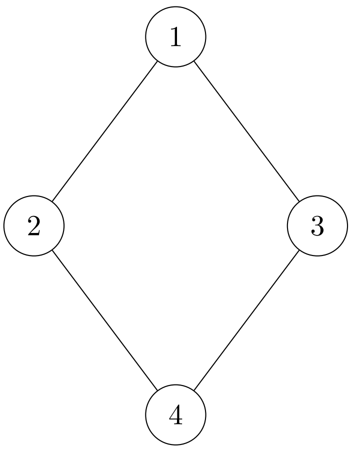
c) En déduire que $U * A$ est semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \ldots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

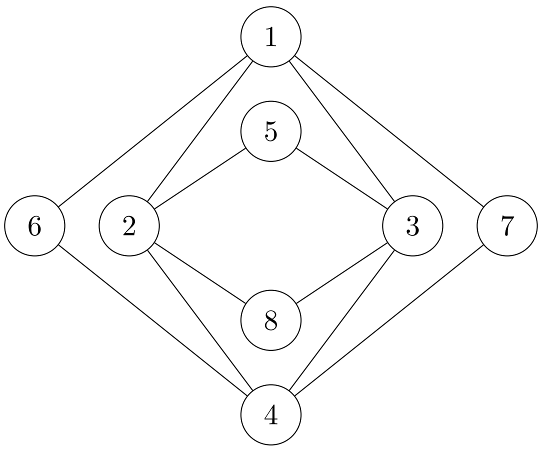
- **1 pt : la famille** $\mathcal{F} = (Y_1, Z_1, \ldots, Y_n, Z_n)$ **est libre et** $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = n + n = 2n = \dim(\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))$ **donc la famille** $(Y_1, Z_1, \ldots, Y_n, Z_n)$ **est une base de** $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$
- **1 pt :** Y_i **est un vecteur propre de** $U * A$ **associé à la valeur propre** $\gamma_1\mu_i$ **et** Z_i **est un vecteur propre de** $U * A$ **associé à la valeur propre** $\gamma_2\mu_i$
- **1 pt : on note** P **la matrice dont les colonnes sont, dans cet ordre,** $Y_1, Z_1, \ldots, Y_n, Z_n$**. D'après la formule de changement de base, la matrice** $D = P^{-1}(U * A)P$ **est diagonale et ses coefficients diagonaux sont, dans cet ordre,** $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \ldots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$**.**

d) En conclure que $\mathcal{E}(U * A) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A)$.

- **1 pt :** $\mathcal{E}(U * A) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\gamma_1\mu_i| + \sum\limits_{i=1}^{n} |\gamma_2\mu_i|$
- **1 pt :** $\mathcal{E}(U) = (|\gamma_1| + |\gamma_2|)$ **et** $\mathcal{E}(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i|$
- **1 pt : reste du calcul**

10. *Un exemple* - On considère un graphe G_n, non orienté et sans boucle, dont les sommets sont $1, \ldots, n$ et l'ensemble des arêtes est noté $\mathcal{A}_n$. On définit le graphe G_{2n} dont les sommets sont $1, \ldots, 2n$ et les arêtes sont celles de G_n, ainsi que, pour toute arête $\{i, j\} \in \mathcal{A}_n$, les arêtes $\{i+n, j\}$ et $\{i, j+n\}$. Voici un exemple de représentation de G_4 et G_8 :





On note A_n et A_{2n} les matrices d'adjacence de G_n et G_{2n}.

a) Déterminer U telle que $A_{2n} = U * A_n$.

- **1 pt :** $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **et** $A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $A_8 = \begin{pmatrix} A_4 & A_4 \\ A_4 & 0_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * A_4$
- **3 pt :** $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **(preuve dans le cas général)**

b) En déduire que $\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5}\ \mathcal{E}(A_n)$.

- **2 pt :** $\mathrm{Sp}(U) = \left\{ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right\}$
- **1 pt :** $\mathcal{E}(U) = |\lambda_1| + |\lambda_2| = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$

Partie 3 - Encadrement de l'énergie d'une matrice d'adjacence

Soit m, n et p des entiers tels que $m \geqslant 1$, $n \geqslant p \geqslant 2$.

On suppose dans cette partie que $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe $G(A)$, non orienté sans boucle, à n sommets $1, \ldots, n$, m arêtes et $n-p$ sommets isolés, c'est-à-dire de degré 0.

On note $(E_1, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et I l'ensemble des sommets non isolés de $G(A)$.

11. *a)* Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m$.

- **1 pt : si i_0 est un sommet isolé (c'est-à-dire si $i_0 \notin I$), alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i_0,j} = 0$ et $a_{j,i_0} = 0$ (i_0 n'a aucun voisin et le graphe $G(A)$ est non orienté)**
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j}$
- **1 pt :** $\displaystyle\sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = \sum_{i \in I} a_{i,i} + 2 \sum_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i<j}} a_{i,j}$
- **1 pt : le graphe $G(A)$ est sans boucle, donc** $\displaystyle\sum_{i \in I} a_{i,i} = 0$
- **1 pt : le graphe $G(A)$ possède m arêtes et la somme $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i<j}} a_{i,j}$ compte précisément le nombre d'arêtes (la restriction $i < j$ permet de ne pas compter deux fois la même arête) donc** $\displaystyle\sum_{\substack{(i,j) \in I^2 \\ i<j}} a_{i,j} = m$

b) Établir que : $1 \leqslant \dfrac{2m}{p} \leqslant p - 1$.

- **1 pt : formule d'Euler bien énoncée**
- **1 pt : pour $i \in I$ un sommet non isolé, on a $1 \leqslant \deg(i) \leqslant p-1$**
- **1 pt :** $p \leqslant 2m \leqslant p(p-1)$

- **1 pt : rappel de $p \geqslant 2 > 0$ pour conclure**

12. a) Justifier qu'il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale différente de la matrice nulle.

- **1 pt : la matrice A est symétrique (réelle) donc elle est diagonalisable. A ce titre, il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale**
- **1 pt : le graphe $G(A)$ possède au moins un sommet non isolé (puisque $p \geqslant 2$) et donc sa matrice d'adjacence n'est pas nulle**

▶ Dans la suite on note D cette matrice diagonale.

b) En déduire que $\operatorname{tr}(D) = 0$, $\operatorname{tr}(D^2) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 2m$.

- **1 pt :** $\operatorname{tr}(D) = \operatorname{tr}(A)$ **car A et D sont semblables**
- **1 pt :** $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,i} = \sum\limits_{i=1}^{n} 0$ **car $G(A)$ est sans boucle**
- **1 pt :** $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}$ **car $a_{i,j} \in \{0,1\}$**

▶ *On suppose dans la suite que P est telle que les éléments diagonaux de D, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifient $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$. On pose $\theta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k$.*

13. a) Soit k un sommet isolé. Montrer que $E_k \in \ker(A)$.
En déduire que $\dim(\ker(A)) \geqslant n - p$ puis que, si $p < n$, $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

- **1 pt :** $AE_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$ **car k est un sommet isolé**
- **1 pt : la famille $\mathcal{F} = (E_k)_{k \in \overline{I}}$ est une famille libre de cardinal $n-p$ dans $\ker(A)$, donc** $\dim(\ker(A)) \geqslant n - p$
- **3 pt : si $p < n$, alors $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ (modulation selon la qualité de la rédaction)**

b) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m$ puis que $0 < \theta < \sqrt{2m}$.

- **1 pt :** $2m = \operatorname{tr}(D^2) = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^2$
- **2 pt : $\theta > 0$ par l'absurde (1pt pour l'inégalité large)**
- **3 pt : $\theta < \sqrt{2m}$ par l'absurde (1pt pour l'inégalité large)**

c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_r$ des réels. Montrer que : $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant r} 2x_i x_j \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant r} (x_i^2 + x_j^2)$.

En déduire que $\left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i\right)^2 \leqslant r \left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2\right)$.

- **1 pt :** $(x_i - x_j)^2 \geqslant 0$ **(0 pt si fausse équivalente écrite avec la somme)**
- **1 pt :** $\left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i\right)^2 = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant r} x_i x_j$
- **2 pt :** $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \frac{1}{2}(x_i^2 + x_j^2) = r \left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2\right)$

d) En conclure que $\mathcal{E}(A) \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m - \theta^2)}$.

- **1 pt : numérotons $x_1, \ldots, x_p$ les réels $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_p|$ de telle sorte que $x_p = |\theta|$**

- **1 pt :** $(p-1)(2m-\theta^2) = (p-1)\sum\limits_{i=1}^{p-1} x_i^2$
- **1 pt :** $(p-1)\sum\limits_{i=1}^{p-1} x_i^2 \geqslant \left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} x_i\right)^2$
- **1 pt :** $\left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} x_i\right)^2 = (\mathcal{E}(A)-\theta)^2$
- **1 pt : conclusion**

14. On admet qu'on peut choisir la matrice P de la question ***12.a)*** de sorte que $P^{-1} = {}^tP$.
On pose alors $Q = {}^tP$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = QX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

- ► *On admet que si M est une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et Z une matrice colonne appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(MZ) = {}^tZ{}^tM$.*
- ► *Si U et V sont deux matrices colonnes appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tUV$ est une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, on l'identifie à son unique coefficient. Donc ${}^tUV \in \mathbb{R}$.*

a) Montrer que $Q^{-1} = {}^tQ$ puis que $A = {}^tQDQ$ et ${}^tYY = {}^tXX$.

- **1 pt :** ${}^tQQ = {}^t({}^tP){}^tP = P\,{}^tP = PP^{-1} = I_n$
- **1 pt :** ${}^tQDQ = {}^t({}^tP)D\,{}^tP = PDP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A$
- **1 pt :** ${}^tYY = {}^t(QX)QX = {}^tX{}^tQQX = {}^tXI_nX = {}^tXX$

b) Montrer que ${}^tXAX = {}^tYDY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.

- **1 pt :** ${}^tYDY = {}^t(QX)DQX = {}^tX{}^tQDQX = {}^tXAX$
- **1 pt :** ${}^tYDY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$

c) En remarquant que $\sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = {}^tYY$, en déduire que ${}^tXAX \leqslant \theta\ {}^tXX$.

- **1 pt :** $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \lambda_k y_k^2 \leqslant \theta y_k^2$ **puis** $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \theta \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2$
- **1 pt :** ${}^tXAX = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \theta \sum\limits_{k=1}^{n} y_k^2 = \theta\ {}^tYY = \theta\ {}^tXX$

15. Soit U la matrice colonne appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le $i$ème coefficient vaut 1 si i n'est pas isolé et 0 sinon.

a) Montrer que ${}^tUAU = \sum\limits_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m$. En déduire que $\dfrac{2m}{p} \leqslant \theta$.

- **1 pt :** $[AU]_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{k,j}u_j = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\in I}}^{n} a_{k,j} \underbrace{u_j}_{=1} + \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\notin I}}^{n} a_{k,j} \underbrace{u_j}_{=0} = \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\in I}}^{n} a_{k,j}$
- **1 pt :** ${}^tUAU = 2m$
- **1 pt : on applique la question *14.c)* avec $X = U$**
- **1 pt :** ${}^tUU = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2 = \sum\limits_{k\in I} 1 = p$

b) Établir que : $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \dfrac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$.

- **1 pt :** $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2m}}{p}$
- **1 pt :** $\dfrac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \dfrac{\theta}{\sqrt{2m}}$
- **1 pt :** $\dfrac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$

16. a) Étudier la fonction $F : x \mapsto x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ sur $[0,1]$.

- **1 pt : par somme et composition, la fonction F est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$ (0 pt si la dérivabilité est annoncée sur $[0,1]$)**
- **1 pt :** $F'(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{p-1}}{\sqrt{1-x^2}}$
- **2 pt :** $F'(x) > 0 \iff 0 \leqslant x < \dfrac{1}{\sqrt{p}}$
- **1 pt :**

x	0	$\frac{1}{\sqrt{p}}$	1
Signe de $F'(x)$	$+$	0	$-$ ‖
Variations de F	$\sqrt{p-1}$ ↗	$\sqrt{p}$	↘ 1

b) En déduire que $\mathcal{E}(A) \leqslant \sqrt{2m}\ F\left(\dfrac{\sqrt{2m}}{p}\right)$, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{E}(A) \leqslant \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} \qquad (1)$$

- **2 pt :** $\mathcal{E}(A) \leqslant \sqrt{2m}\ F\left(\dfrac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)$
- **1 pt :** $F\left(\dfrac{\theta}{\sqrt{2m}}\right) \leqslant F\left(\dfrac{\sqrt{2m}}{p}\right)$
- **1 pt :** $\sqrt{2m}\ F\left(\dfrac{\sqrt{2m}}{p}\right) = \dfrac{2m}{p} + \dfrac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)}$

17. On suppose dans cette question que A est la matrice d'adjacence d'un graphe complet de sommets $1, \dots, n$ donc $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $p = n$.

a) Représenter la matrice A.

- **1pt :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Montrer que -1 est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

- **1 pt :** $\mathrm{rg}(A-(-1)I_n) = \mathrm{rg}(A+I_n) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$
- **1 pt :** $\dim(E_{-1}(A)) = n-1$ **(théorème du rang)**

c) Établir aussi que $n-1$ est une valeur propre de A. En déduire que $\mathcal{E}(A) = 2(n-1)$ et que l'inégalité (1) est alors une égalité.

- **1 pt :** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $\dim(E_{n-1}(A)) = 1$ **par double inégalité**
- **1 pt :** $\mathcal{E}(A) = 2(n-1)$
- **1 pt comme** $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ **et** $p = n$, $\dfrac{2m}{p} + \dfrac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} = 2(n-1)$

► *On note* $\alpha = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant p} |\lambda_k|$ *et* $\beta = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant p} |\lambda_k|$. *On note aussi d le degré maximal des sommets du graphe $G(A)$.*

18. Écrire une fonction **Python** `degMax(A)` qui renvoie le maximum des degrés des sommets du graphe $G(A)$, celui-ci étant donné par sa matrice d'adjacence sous la forme du tableau `numpy A`.

- **1 pt : calcul du degré d'un sommet via `A`**
- **1 pt : calcul du maximum via une boucle et un test conditionnel**
- **2 pt : bonus si le reste est cohérent**

19. *a)* Montrer que pour tout $j \in \{1,\ldots,p\}$, $|\lambda_j|(\alpha+\beta) \geqslant \lambda_j^2 + \alpha\beta$.

- **1 pt :** $|\lambda_j|(\alpha+\beta) \geqslant \lambda_j^2+\alpha\beta \iff 0 \geqslant |\lambda_j|^2 - |\lambda_j|(\alpha+\beta)+\alpha\beta \iff 0 \geqslant (|\lambda_j|-\alpha)(|\lambda_j|-\beta)$
- **1 pt :** $|\lambda_j| - \alpha \geqslant 0$ **et** $|\lambda_j| - \beta \leqslant 0$

b) En déduire que $(\alpha+\beta)\mathcal{E}(A) \geqslant \mathrm{tr}(A^2) + p\alpha\beta$, puis que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m+p\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

- **1 pt :** $(\alpha+\beta)\sum\limits_{j=1}^{p} |\lambda_j| \geqslant \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j^2 + \sum\limits_{j=1}^{p} \alpha\beta = \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j^2 + p\alpha\beta$
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j^2 = \mathrm{tr}(A^2)$
- **1 pt :** $\sum\limits_{j=1}^{p} |\lambda_j| = \mathcal{E}(A)$
- **1 pt :** $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2) = 2m$

c) Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b^2$. Étudier les variations de $\varphi : t \mapsto \dfrac{a+bt}{b+t}$ sur $\mathbb{R}^+$.

- **1 pt : la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de deux fonctions polynomiales dérivables sur $\mathbb{R}^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ (car $b > 0$)**
- **1 pt :** $\varphi'(t) = \dfrac{b(b+t)-(a+bt)}{(b+t)^2} = \dfrac{b^2-a}{(b+t)^2} \geqslant 0$

d) Montrer que $2m \leqslant p\beta^2$. En déduire que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{\beta}$.

- **1 pt :** $2m = \operatorname{tr}(D^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{p} |\lambda_k|^2$
- **1 pt : pour tout** $k \in [\![1,p]\!]$**,** $|\lambda_k|^2 \leqslant \beta^2$
- **1 pt :**

$$\begin{aligned}\frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha+\beta} &= p\ \frac{\dfrac{2m}{p} + \alpha\beta}{\alpha+\beta} \\ &= p\ \frac{a + b\alpha}{b+\alpha} && \textit{(où } a = \frac{2m}{p} \textit{ et } b = \beta\textit{)} \\ &= p\,\varphi(\alpha)\end{aligned}$$

- **1 pt :** $\varphi(\alpha) \geqslant \varphi(0) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2m}{p\beta}$

20. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \beta$.

a) Montrer que pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $\beta\,|x_i| \leqslant d \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|$.

- **1 pt :** $\lambda x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}\, x_k$
- **1 pt : inégalité triangulaire**
- **1 pt : majoration par le max**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k} = \deg(i) \leqslant d$

b) En conclure que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{d} \geqslant \dfrac{2m}{p-1}$ (2).

- **1 pt : on fixe** $i \in \{1,\dots,n\}$ **tel que** $|x_i| = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |x_j|$
- **1 pt :** $|x_i| > 0$ **en raisonnant par l'absurde**
- **1 pt :** $d \leqslant p-1$ **en raisonnant par l'absurde**

c) Montrer que l'égalité dans (2) est réalisée pour la matrice A carrée appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associée au graphe dont l'unique arête est $\{1,2\}$.

- **2 pt :** $\operatorname{rg}(A) = 2$ **et** 0 **est valeur propre de** A **de multiplicité** $n-2$ **(autrement dit,** $\dim(\ker(A)) = n-2$**)**
- **2 pt :** $\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \lambda \in \{-1,0,1\}$
- **1 pt :** $\mathcal{E}(A) = 1 \times |-1| + 1 \times |1| + (n-2) \times |0| = 2$
- **1 pt : pour le graphe considéré :** $m = 1$ **(il y a une unique arête) et** $p = 2$ **(il y a exactement deux sommets non isolés : ceux qui sont reliés par l'unique arête du graphe). D'où** $\dfrac{2m}{p-1} = \dfrac{2\times 1}{2-1} = 2$