DS4 (version B) - correction (ESSEC II 2024)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

On s'intéresse dans ce problème à l'énergie d'un graphe qui est définie à partir de l'énergie de sa matrice d'adjacence.

L'énergie d'un graphe a été introduite en 1978 par Ivan Gutman. Ce n'est qu'à partir des années 2000 que des recherches approfondies sur cette notion ont été entreprises.

Aujourd'hui plus de deux articles par semaine sont publiés sur l'énergie des graphes avec de nombreuses applications dans divers domaines scientifiques.

Les parties 2 et 3 sont indépendantes et un bref aide-mémoire Python se trouve en page 6.

Dans tout le problème n est un entier supérieur ou égal à 2.

On rappelle que la notation $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est analogue à la notation $\sum\limits_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$.

Partie 1 - Énergie et trace d'une matrice

1. Soit A une matrice carrée symétrique appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier l'existence d'une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale. Que peut-on dire des éléments diagonaux de $P^{-1}AP$?

Démonstration.
La matrice A est symétrique (réelle) donc est diagonalisable. Ainsi, il existe :

× une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres de A,

× une matrice $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A,

telles que $A = PDP^{-1}$.

$$\boxed{\text{La matrice } P^{-1}AP \text{ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont les valeurs propres de } A.}$$

□

► *En notant $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de $P^{-1}AP$, on pose alors $\mathcal{E}(A) = \sum\limits_{k=1}^{n} |\lambda_k|$, on nomme ce réel positif l'énergie de A.*
On admet que cette somme ne dépend pas du choix de P.

2. Montrer que $\mathcal{E}(A) = 3$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration.
Tout d'abord, remarquons que A est bien symétrique (réelle) et donc diagonalisable.
De plus, à l'aide de la question ***1***, on peut traduire la définition de l'énergie de $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ en :

$$\mathcal{E}(A) = \sum_{k=1}^{3} |\lambda_k|$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont les valeurs propres de A (éventuellement répétées plusieurs fois selon la dimension du sous-espace propre associé).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) &= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) & \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 1-\lambda & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) & L_1 \leftrightarrow L_3 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -\lambda & \lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda+\lambda^2 \end{pmatrix}\right) & \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda)L_1 \end{array} \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & -\lambda & \lambda \end{pmatrix}\right) & L_2 \leftrightarrow L_3 \\
&= \operatorname{rg}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 & -\lambda \\ 0 & -1 & -1-\lambda+\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)(2-\lambda) \end{pmatrix}\right) & L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_2
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\lambda \in \operatorname{Sp}(A) &\iff A-\lambda I_3 \text{ est non inversible} \\
&\iff \operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3 \\
&\iff \lambda(\lambda+1)(2-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

et donc :

$$\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$$

Puisque $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et possède 3 valeurs propres distinctes, chaque sous-espace propre est de dimension 1. En effet, ils sont tous les trois de dimension au moins 1. Si l'un d'entre eux était de dimension au moins 2, on pourrait alors construire par théorème de concaténation une famille libre de cardinal au moins 4 dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, ce qui serait absurde car $\dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3$.

$$\boxed{\text{On en déduit que } \mathcal{E}(A) = |-1| + |0| + |2| = 1 + 2 = 3.}$$

$\square$

Commentaire

Un œil avisé aura remarqué avant tout calcul que la matrice A n'est pas inversible (car ses deux dernières colonnes sont égales) donc 0 est valeur propre de A.

De plus, la somme des coefficients sur chaque ligne vaut -1 donc $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc -1 est valeur propre de A.

Avoir ces deux informations en tête permet de détecter une éventuelle erreur de calcul lors du pivot de Gauss effectué afin de déterminer le spectre de A.

Allons même un peu plus loin. À la question ***4.c)***, on démontre que deux matrices semblables ont même trace. Une conséquence de ce résultat est que la trace d'une matrice est la somme de ses valeurs propres (comptées avec multiplicité selon les dimensions des sous-espaces propres). Puisqu'on sait déjà que -1 et 0 sont valeurs propres de A, et puisque $\operatorname{tr}(A) = 1 + 0 + 0 = 1$, la dernière valeur propre ne peut être que 2 (on doit résoudre $-1 + 0 + \lambda = 1$).

3. Ecrire une fonction **Python** `energie(A)` qui renvoie l'énergie de la matrice symétrique représentée par le tableau `numpy A`.

Démonstration.
On utilise la fonction `al.eigvals` proposée en aide-mémoire pour avoir accès aux coefficients d'une matrice diagonale semblable à A, c'est-à-dire aux valeurs propres de A.

```
1 def energie(A)
2     D = al.eigvals(A) # tableau des valeurs propres de A
3     return np.sum(np.abs(D))
```

Détaillons les trois étapes du calcul de l'énergie de A :

- × à la ligne 2, on crée une variable `D` contenant le tableau `[`λ_1`,`λ_2`,...,`λ_n`]` où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de A (comptées avec multiplicité selon les dimensions des sous-espaces propres).
- × à la ligne 3, `np.abs(D)` contient le tableau `[`$|\lambda_1|$`,`$|\lambda_2|$`,...,`$|\lambda_n|$`]` puis `np.sum(np.abs(D))` renvoie la somme des éléments de ce tableau, c'est à dire l'énergie de A.

□

► *Si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on définit la trace de A, notée* $\mathrm{tr}(A)$ *par :*

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

4. Notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

a) Montrer que : $\mathrm{tr}(AB) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \right) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{j,i}$.

Démonstration.
Par définition du produit matriciel : $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} && \textit{(par définition de la trace)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \right) \\
&= \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{i,j} b_{j,i} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{j,i}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,i} \right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{j,i}.}$$

□

b) En déduire que : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ et $\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2$.

Que peut-on dire de A si $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$?

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(AB) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} b_{j,i} && \textit{(d'après la question \textbf{4.a)})} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} b_{j,i} a_{i,j} \\
&= \sum_{1 \leqslant j,i \leqslant n} b_{j,i} a_{i,j} \\
&= \operatorname{tr}(BA) && \textit{(d'après la question \textbf{4.a)})}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$$

- Ensuite, en notant, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[M]_{i,j}$ le coefficient à la position (i,j) d'une matrice M :

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}({}^tAA) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [{}^tA]_{i,j} [A]_{j,i} && \textit{(d'après la question \textbf{4.a)})} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [A]_{j,i} [A]_{j,i} && \textit{(par définition de } {}^tA\textit{)} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i} a_{j,i} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{tr}({}^tAA) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2}$$

- Supposons que $\operatorname{tr}({}^tAA) = 0$.
  Alors $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{j,i}^2 = 0$.
  Or, une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes de la somme sont nuls.
  On en déduit :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i}^2 = 0$$
  et donc :
  $$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{j,i} = 0$$
  $$\boxed{\text{Ainsi : } A = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}.}$$

□

c) Si A et B sont semblables, montrer que $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$.

Démonstration.
Supposons A et B semblables. Alors il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \text{tr}\left((PB)P^{-1}\right) \\ &= \text{tr}\left(P^{-1}(PB)\right) && \textit{(d'après la question 4.b))} \\ &= \text{tr}(B) && \textit{(car } P^{-1}P = I_n\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \text{tr}(A) = \text{tr}(B).}$$

□

5. Dans cette question $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est symétrique et on utilise les notations de la question ***1***.

a) Montrer que $|\text{tr}(A)| \leqslant \mathcal{E}(A)$.

Démonstration.
Avec les notations de la question ***1***, posons : $D = P^{-1}AP$. On a vu que D était une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D (c'est-à-dire les valeurs propres de A).
On a alors :

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \text{tr}(D) && \textit{(d'après la question 4.c), car A et D sont semblables)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \end{aligned}$$

Or, par inégalité triangulaire :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|$$

$$\boxed{\text{Cette dernière inégalité se réécrit : } |\text{tr}(A)| \leqslant \mathcal{E}(A).}$$

□

b) Justifier que $\text{tr}(A^2) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Démonstration.
Réutilisons les notations de la question précédente. Tout d'abord :

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})^2 \\ &= (PDP^{-1})\,(PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)DP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} && \textit{(car } P^{-1}P = I_n\textit{)} \end{aligned}$$

et donc les matrices A^2 et D^2 sont semblables. Ainsi, d'après la question ***4.c)***, $\text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2)$.
De plus, la matrice D étant diagonale, la matrice D^2 est encore diagonale et ses coefficients diagonaux sont : $\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2$.

$$\boxed{\text{D'où : } \text{tr}(A^2) = \text{tr}(D^2) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2.}$$

□

6. Dans la console **Python**, on obtient :

```
> > > energie(3*np.eye(3)-np.ones([3,3]))
6.0
```

a) Déterminer quelle est la matrice A associée au tableau `3*np.eye(3)-np.ones([3,3])`.

Démonstration.
Détaillons la construction de la matrice A :

× La commande `np.eye(3)` crée un tableau `numpy` à 3 lignes et 3 colonnes ne contenant que des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs. Autrement dit, cette commande renvoie la matrice I_3.

× La commande `np.ones([3,3])` crée un tableau `numpy` à 3 lignes et 3 colonnes ne contenant que des 1. Autrement dit, cette commande renvoie la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Donc : } A = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

□

b) En calculant $\text{tr}(A)$, $\text{tr}(A^2)$ et en déterminant une valeur propre évidente de A, expliciter son spectre et retrouver son énergie.

Démonstration.
Tout d'abord : $\text{tr}(A) = 6$. De plus :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \text{tr}(A^2) = 18.}$$

Ensuite, on remarque :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$, on en déduit que 0 est valeur propre de A.

La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable et admet 3 valeurs propres (comptées avec multiplicité). Notons α et β les deux valeurs propres restantes. D'après les questions ***5.a)*** et ***5.b)***, on a :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 0 & + & \alpha & + & \beta & = & \text{tr}(A) & = & 6 \\ 0 & + & \alpha^2 & + & \beta^2 & = & \text{tr}(A^2) & = & 18 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} & & \beta & = & 6-\alpha \\ \alpha^2 & + & \beta^2 & = & 18 \end{array} \right.$$

Déterminons α. Il s'agit de résoudre l'équation $\alpha^2 + (6-\alpha)^2 = 18$.
Or :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + (6-\alpha)^2 = 18 &\iff \alpha^2 + 36 - 12\alpha + \alpha^2 = 18 \\ &\iff 2\alpha^2 - 12\alpha + 18 = 0 \\ &\iff \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 0 \\ &\iff (\alpha-3)^2 = 0 \\ &\iff \alpha = 3 \end{aligned}$$

On en déduit alors que $\beta = 6 - 3 = 3$.

$$\boxed{\text{On peut conclure : } \mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}.}$$

Puisque la valeur propre 3 apparaît deux fois, on obtient :

$$\mathcal{E}(A) = |0| + |3| + |3| = 6$$

$$\boxed{\text{Notre calcul de l'énergie de } A \text{ est cohérent avec le résultat renvoyé par } \textbf{Python}.}$$ □

Partie 2 - Produit de Kronecker $2 \times n$ de matrices symétriques

- Soit $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique et A une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.
  On définit $U * A$ la matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ que l'on peut naturellement représenter ainsi $\begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix}$ (écriture par blocs).

- Par exemple, si $U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $U * A = \begin{pmatrix} 2A & A \\ A & 0_3 \end{pmatrix}$ par blocs,

  d'où $U * A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (0_3 désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$).

- Si X est une matrice colonne appartenant à $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$, on écrira $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ avec

  $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{pmatrix}$.

  On admet qu'alors la matrice colonne $(U * A)X$ de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ est égale à $\begin{pmatrix} uAX_1 + vAX_2 \\ vAX_1 + wAX_2 \end{pmatrix}$.

7. a) Écrire une fonction **Python** `prod2K(u,v,w,A)` qui étant donné $U = \begin{pmatrix} u & v \\ v & w \end{pmatrix}$ et A, représentée par un tableau `numpy`, renvoie $U * A$ sous la forme d'un tableau `numpy`.

Démonstration.

```
def prod2K(u,v,w,A):
    n = len(A) # taille de la matrice A
    K = np.zeros([2*n,2*n]) # K sera la matrice U*A
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            K[i,j] = u * A[i,j] # partie en haut à gauche
            K[i+n,j] = v * A[i,j] # partie en bas à gauche
            K[i,j+n] = v * A[i,j] # partie en haut à droite
            K[i+n,j+n] = w * A[i,j] # partie en bas à droite
    return K
```

Détaillons la construction de la matrice $U * A = \begin{pmatrix} uA & vA \\ vA & wA \end{pmatrix}$:

- × si la matrice A est de taille $n \times n$, alors la matrice $U * A$ est de taille $2n \times 2n$,
- × on récupère l'entier n à la ligne 2,
- × on crée à la ligne 3 une matrice `K` de taille $2n \times 2n$, initialement remplie de 0,
- × on parcourt tous les coefficients de la matrice `K` à l'aide d'une double boucle `for` imbriquée, aux lignes 4 et 5,
- × à la ligne 6, on remplit le bloc en haut à gauche (uA) en manipulant les coefficients $K[i, j]$ pour $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ (on rappelle que la numérotation commence toujours à 0 en **Python**),
- × à la ligne 7, on remplit le bloc en bas à gauche (vA) en manipulant les coefficients $K[i, j]$ pour $(i, j) \in [\![n, 2n-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$,
- × à la ligne 8, on remplit le bloc en haut à droite (vA) en manipulant les coefficients $K[i, j]$ pour $(i, j) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![n, 2n-1]\!]$,
- × à la ligne 9, on remplit le bloc en bas à droite (wA) en manipulant les coefficients $K[i, j]$ pour $(i, j) \in [\![n, 2n-1]\!]^2$.

Commentaire

On utilise à la ligne 2 la commande `n = len(A)` pour récupérer la taille de la matrice A. Ceci est valide car la matrice A est représentée en **Python** par une liste contenant les lignes de la matrice, elles-même codées par des listes. Ainsi, `n = len(A)` renvoie le nombre de lignes de la matrice A, ce qui correspond bien à sa taille lorsque celle-ci est carrée.
La commande `np.shape(A)` permet également de récupérer la taille de `A` mais cela complique inutilement le code. En effet, il faut écrire dans ce cas `n,n = np.shape(A)`.

□

b) Compléter le code suivant s'affichant dans la console **Python** :

```
> > > prod2K(...,-1,...,...)
array([[-2., 1., 2., -1.],
       [1., -2., -1., 2.],
       [2., -1., -4., 2.],
       [-1., 2., 2., -4.]])
```

Démonstration.
Au vu de la spécification de la fonction, on cherche u, w et A de sorte que la matrice renvoyée soit $U * A$.
D'après la partie du code pré-remplie : $v = -1$.
De plus, en regardant le bloc 2×2 en haut à droite de la matrice $U * A$: $vA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et donc $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Ensuite, en regardant le bloc en haut à gauche de la matrice $U * A$: $uA = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et donc $u = 1$.
Enfin, en regardant le bloc en bas à droite de la matrice $U * A$: $wA = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et donc $w = 2$.

Il faut écrire : `prod2K(1,-1,2,np.array([[-2,1],[1,-2]]))`.

□

8. Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur propre de U pour la valeur propre λ et X un vecteur propre de A pour μ. On pose $Y = \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix}$.

a) Établir l'égalité : $(U * A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$.

Démonstration.
D'après la formule admise dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} (U*A)Y &= \begin{pmatrix} uA(aX) + vA(bX) \\ vA(aX) + wA(bX) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua\,(AX) + vb\,(AX) \\ va\,(AX) + wb\,(AX) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ua\,(\mu X) + vb\,(\mu X) \\ va\,(\mu X) + wb\,(\mu X) \end{pmatrix} & \textit{(car } X \textit{ est un vecteur propre de } A \textit{ associé à la valeur propre } \mu.) \\ &= \begin{pmatrix} \mu(ua+vb)X \\ \mu(va+wb)X \end{pmatrix} \\ &= \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } (U*A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}.}$$

□

b) Montrer que Y est un vecteur propre de $U * A$ et préciser pour quelle valeur propre.

Démonstration.

- Commençons par montrer que Y n'est pas le vecteur nul :
  × le vecteur X n'est pas nul (sinon ce ne serait pas un vecteur propre de A) et donc possède au moins une coordonnée non nulle,
  × le vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ n'est pas nul non plus (sinon ce ne serait pas un vecteur propre de U) et donc $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

  Dans tous les cas, Y possède au moins une coordonnée non nulle et donc n'est pas le vecteur nul.
- D'après la question ***8.a)*** :
$$(U*A)Y = \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix}$$
  On doit donc calculer $ua + vb$ et $va + wb$.
- Pour faire ce calcul, on utilise le fait que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de U pour la valeur propre λ. Plus précisément :
  × d'une part :
$$U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix}$$
  × d'autre part :
$$U \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ua+vb \\ va+wb \end{pmatrix}$$

On identifie et on obtient :

$$\begin{aligned} ua + vb &= \lambda a \\ va + wb &= \lambda b \end{aligned}$$

- Reprenons la formule de la question ***8.a)*** :

$$\begin{aligned} (U * A)Y &= \mu \begin{pmatrix} (ua+vb)X \\ (va+wb)X \end{pmatrix} \\ &= \mu \begin{pmatrix} \lambda a X \\ \lambda b X \end{pmatrix} \\ &= \mu\lambda \begin{pmatrix} aX \\ bX \end{pmatrix} \\ &= \mu\lambda Y \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } Y \text{ est un vecteur propre de } U * A \text{ pour la valeur propre } \mu\lambda.}$$

□

9. a) Justifier l'existence d'une base $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right)$ de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et de $(X_1, \dots, X_n)$ une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, formée de vecteurs propres de U et A respectivement.

Démonstration.
La matrice U est symétrique (réelle) donc diagonalisable. Comme $U \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, alors :

$$\boxed{\text{il existe une base } \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}\right) \text{ de } \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } U.}$$

De manière analogue, la matrice A est symétrique (réelle) donc diagonalisable. Comme $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\boxed{\text{il existe une base } (X_1, \dots, X_n) \text{ de } \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } A.}$$

□

► *On note γ_1 et γ_2 les valeurs propres associées à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ respectivement et $\mu_1, \dots, \mu_n$ celles associées à $X_1, \dots, X_n$ respectivement.*
On pose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $Y_i = \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix}$ et $Z_i = \begin{pmatrix} cX_i \\ dX_i \end{pmatrix}$.

b) Montrer que la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est libre.

Démonstration.
Soit $(y_1, z_1, \dots, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Supposons :

$$y_1 Y_1 + z_1 Z_1 + \cdots + y_n Y_n + z_n Z_n = 0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})} \quad (*)$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} y_i Y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i Z_i = 0_{\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})}$$

Montrons alors : $y_1 = z_1 = \cdots = y_n = z_n = 0$.

Pour cela, écrivons différemment la somme $\sum_{i=1}^{n} y_i Y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i Z_i$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} y_i Y_i + \sum_{i=1}^{n} z_i Z_i &= \sum_{i=1}^{n} y_i \begin{pmatrix} aX_i \\ bX_i \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} z_i \begin{pmatrix} cX_i \\ dX_i \end{pmatrix} && \textit{(par définition de } Y_i \textit{ et } Z_i\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} ay_iX_i \\ by_iX_i \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} cz_iX_i \\ dz_iX_i \end{pmatrix} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} ay_iX_i \\ by_iX_i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cz_iX_i \\ dz_iX_i \end{pmatrix} \right) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} (ay_i + cz_i)X_i \\ (by_i + dz_i)X_i \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} (ay_i + cz_i)X_i \\ \sum_{i=1}^{n} (by_i + dz_i)X_i \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'après $(*)$, on en déduit :

$$\sum_{i=1}^{n} (ay_i + cz_i)X_i = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} (by_i + dz_i)X_i = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

Par liberté de la famille $(X_1, \dots, X_n)$, on peut conclure :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], ay_i + cz_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall i \in [\![1, n]\!], by_i + dz_i = 0$$

Soit $i \in [\![1, n]\!]$. On vient d'obtenir n couples d'égalités dont le i^{e} se traduit de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, la famille $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$ est une base donc est libre.

On en déduit que $\text{rg}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right) = 2$ et donc la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est inversible. D'où : $y_i = z_i = 0$.

Ceci étant valable pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $y_1 = z_1 = \dots = y_n = z_n = 0$.

$$\boxed{\text{La famille } (Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n) \text{ est libre.}}$$

□

c) En déduire que $U * A$ est semblable à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

Démonstration.
Montrons qu'il existe une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de $U * A$ associés respectivement aux valeurs propres $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

- Tout d'abord :
  - × la famille $\mathcal{F} = (Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est libre (d'après la question ***9.b)***),
  - × $\text{Card}(\mathcal{F}) = n + n = 2n = \dim(\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))$.

  On en déduit que la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.
- Soit $i \in [\![1, n]\!]$. D'après la question ***8.b)***, Y_i est un vecteur propre de $U * A$ associé à la valeur propre $\gamma_1\mu_i$ et Z_i est un vecteur propre de $U * A$ associé à la valeur propre $\gamma_2\mu_i$.

On note P la matrice dont les colonnes sont, dans cet ordre, $Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n$. La matrice P est inversible car la famille $(Y_1, Z_1, \dots, Y_n, Z_n)$ est libre. D'après la formule de changement de base, la matrice $D = P^{-1}(U * A)P$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont, dans cet ordre, $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.

$$\boxed{\text{$U * A$ est semblable à la matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$.}}$$ □

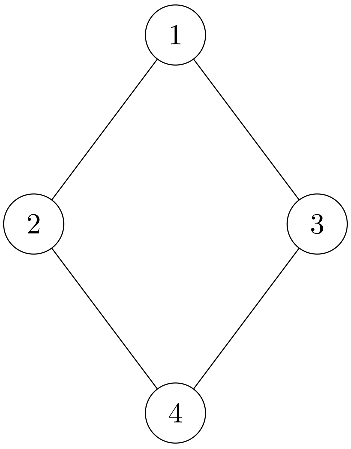
d) En conclure que $\mathcal{E}(U * A) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A)$.

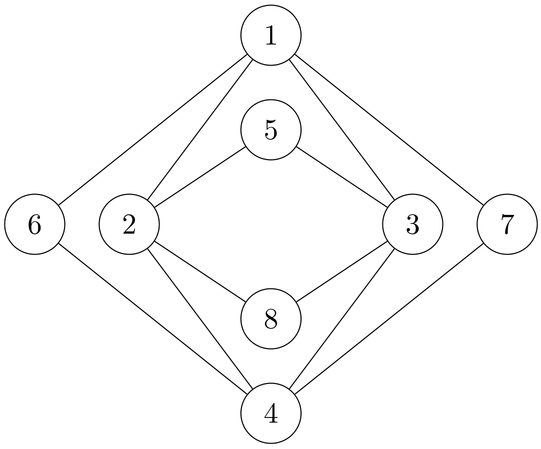
Démonstration.
D'après la question ***9.c)***, $U*A$ est semblable à la matrice diagonale D dont les éléments diagonaux sont $\gamma_1\mu_1, \gamma_2\mu_1, \dots, \gamma_1\mu_n, \gamma_2\mu_n$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(U * A) &= \sum_{i=1}^{n} |\gamma_1\mu_i| + \sum_{i=1}^{n} |\gamma_2\mu_i| && \textit{(par définition de l'énergie d'une matrice)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(|\gamma_1|\,|\mu_i| + |\gamma_2|\,|\mu_i|\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(|\gamma_1| + |\gamma_2|\right)|\mu_i| \\
&= \left(|\gamma_1| + |\gamma_2|\right) \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| \\
&= \mathcal{E}(U) \times \sum_{i=1}^{n} |\mu_i| && \textit{(car la matrice U possède 2 valeurs propres comptées avec multiplicité, qui sont γ_1 et γ_2)} \\
&= \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A) && \textit{(car la matrice A possède n valeurs propres comptées avec multiplicité, qui sont $\mu_1, \dots, \mu_n$)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } \mathcal{E}(U * A) = \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A).}$$ □

10. *Un exemple* - On considère un graphe G_n, non orienté et sans boucle, dont les sommets sont $1, \dots, n$ et l'ensemble des arêtes est noté $\mathcal{A}_n$. On définit le graphe G_{2n} dont les sommets sont $1, \dots, 2n$ et les arêtes sont celles de G_n, ainsi que, pour toute arête $\{i, j\} \in \mathcal{A}_n$, les arêtes $\{i+n, j\}$ et $\{i, j+n\}$. Voici un exemple de représentation de G_4 et G_8 :





On note A_n et A_{2n} les matrices d'adjacence de G_n et G_{2n}.

a) Déterminer U telle que $A_{2n} = U * A_n$.

Démonstration.

- Commençons par écrire les matrices A_4 et A_8 obtenues par lecture des graphes donnés en exemple :

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En regardant la matrice A_8 par blocs, on remarque que $A_8 = \begin{pmatrix} A_4 & A_4 \\ A_4 & 0_4 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire :

$$A_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * A_4$$

- Plus généralement, montrons que $A_{2n} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & 0_n \end{pmatrix}$ (écriture par blocs), quelque soit le graphe G_n. Notons $A_{2n} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$ où, pour tout $i \in [\![1,4]\!]$, $B_i \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
  - × Pour toute arête $\{i,j\} \in \mathcal{A}_n$, on a $i+n \geqslant n+1$ et $j+n \geqslant n+1$ donc les nouvelles arêtes ajoutées dans G_{2n} ne relient jamais deux sommets parmi les sommets $1,\dots,n$. Ceci prouve que $B_1 = A_n$ (on a exactement les mêmes arêtes dans G_n et dans G_{2n} entre les sommets $1,\dots,n$).
  - × Par construction, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $[A_{2n}]_{i,j+n} = [A_n]_{i,j}$.
    En effet, si $\{i,j\}$ est une arête de G_n (*i.e.* si $[A_n]_{i,j} = 1$), alors $\{i,j+n\}$ est une arête de G_{2n} (*i.e.* $[A_{2n}]_{i,j+n} = 1$).
    Réciproquement, si $\{i,j\}$ n'est pas une arête de G_n (*i.e.* si $[A_n]_{i,j} = 0$), alors $\{i,j+n\}$ n'est pas une arête de G_{2n} (*i.e.* $[A_{2n}]_{i,j+n} = 0$).
    On a donc $B_2 = A_n$.
  - × La matrice A_{2n} étant une matrice d'adjacence d'un graphe non orienté, elle est symétrique. Ainsi : $B_3 = B_2 = A_n$.
  - × Par construction, il n'y a aucune arête dans G_{2n} reliant deux sommets x et y vérifiant $x \geqslant n+1$ et $y \geqslant n+1$. Ainsi : $B_4 = 0_n$.

$$\boxed{\text{On a démontré que } A_{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} * A_n. \text{ On pose donc } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) En déduire que $\mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5}\ \mathcal{E}(A_n)$.

Démonstration.

- Tout d'abord, en posant $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(A_{2n}) &= \mathcal{E}(U * A_n) && \textit{(d'après la question \textbf{10.a)})} \\ &= \mathcal{E}(U) \times \mathcal{E}(A_n) && \textit{(d'après la question \textbf{9.d)})} \end{aligned}$$

- Calculons maintenant $\mathcal{E}(U)$.
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\det(U - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(1-\lambda) - 1 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 1\end{aligned}$$

  Le discriminant de ce trinôme du second degré est $\Delta = 1 + 4 = 5$.
  Ses deux racines sont $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ et $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$.
  D'où : $\mathrm{Sp}(U) = \left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

On en déduit :

$$\mathcal{E}(U) = |\lambda_1| + |\lambda_2| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \sqrt{5}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \mathcal{E}(A_{2n}) = \sqrt{5}\ \mathcal{E}(A_n).}$$

□

Partie 3 - Encadrement de l'énergie d'une matrice d'adjacence

Soit m, n et p des entiers tels que $m \geqslant 1$, $n \geqslant p \geqslant 2$.

On suppose dans cette partie que $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est la matrice d'adjacence d'un graphe $G(A)$, non orienté sans boucle, à n sommets $1, \dots, n$, m arêtes et $n - p$ sommets isolés, c'est-à-dire de degré 0.

On note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et I l'ensemble des sommets non isolés de $G(A)$.

11. a) Montrer que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m$.

Démonstration.
Soit $i_0 \in [\![1, n]\!]$. Si i_0 est un sommet isolé (c'est-à-dire si $i_0 \notin I$), alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i_0,j} = 0$ et $a_{j,i_0} = 0$ (i_0 n'a aucun voisin et le graphe $G(A)$ est non orienté). Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} &= \sum_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} a_{i,j} \\ &= \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \text{ et } j \text{ non isolés}}} a_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \\ i \text{ isolé ou } j \text{ isolé}}} a_{i,j} \\ &= \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} + \sum_{i \notin I \texttt{ OU } j \notin I} a_{i,j} \\ &= \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} + \sum_{i \notin I \texttt{ OU } j \notin I} 0 \qquad \textit{(d'après la remarque précédente)} \\ &= \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j}.}$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} &= \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i=j}} a_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i\neq j}} a_{i,j} \\
&= \sum_{i\in I} a_{i,i} + \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i<j}} a_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ j<i}} a_{i,j} \\
&= \sum_{i\in I} a_{i,i} + \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i<j}} a_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ j<i}} a_{j,i} && \textit{(car } a_{i,j} = a_{j,i}\textit{)} \\
&= \sum_{i\in I} a_{i,i} + \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i<j}} a_{i,j} + \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i<j}} a_{i,j} && \textit{(car les variables } i \textit{ et } j \textit{ sont muettes)} \\
&= \sum_{i\in I} a_{i,i} + 2 \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i<j}} a_{i,j}
\end{aligned}$$

× Le graphe $G(A)$ est sans boucle, donc : $\forall i \in I, a_{i,i} = 0$. D'où :

$$\sum_{i\in I} a_{i,i} = 0$$

× Le graphe $G(A)$ possède m arêtes et la somme $\sum\limits_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i<j}} a_{i,j}$ compte précisément le nombre d'arêtes (la restriction $i < j$ permet de ne pas compter deux fois la même arête). D'où :

$$\sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ i<j}} a_{i,j} = m$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} = 2m.}$$

□

b) Établir que : $1 \leqslant \dfrac{2m}{p} \leqslant p - 1$.

Démonstration.
D'après la formule d'Euler (dite des poignées de mains) :

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(i) = 2m$$

Remarquons que $\deg(i) = 0$ si et seulement si $i \notin I$. On en déduit :

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i\in I}}^{n} \deg(i) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\notin I}}^{n} \deg(i) = \sum_{i\in I} \deg(i)$$

Puisqu'il y a $n - p$ sommets isolés, il y a donc p sommets non isolés. D'où : $\text{Card}(I) = p$.
Considérons $i \in I$ un sommet non isolé.

× Tout d'abord, i possède au moins un voisin. D'où : $\deg(i) \geqslant 1$ $(*)$.

× Ensuite, i peut avoir au plus $p-1$ voisins (p voisins potentiels que sont les sommets non isolés, auxquels on doit retirer le sommet i puisque le graphe $G(A)$ est sans boucle).
D'où : $\deg(i) \leqslant p - 1$ $(**)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} p &= \operatorname{Card}(I) \\ &= \sum_{i \in I} 1 \\ &\leqslant \sum_{i \in I} \deg(i) && \textit{(d'après } (*)\textit{)} \\ &\leqslant \sum_{i \in I} (p-1) && \textit{(d'après } (**)\textit{)} \\ &= p(p-1) \end{aligned}$$

D'où :

$$p \leqslant 2m \leqslant p(p-1)$$

et puisque $p \geqslant 2 > 0$, on a bien :

$$\boxed{1 \leqslant \frac{2m}{p} \leqslant p-1}$$

□

12. a) Justifier qu'il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale différente de la matrice nulle.

Démonstration.
La matrice A est symétrique (réelle) donc elle est diagonalisable. A ce titre, il existe une matrice carrée inversible P appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.
Si cette matrice diagonale D était nulle, alors, comme $A = PDP^{-1}$, A serait nulle également.
Or, le graphe $G(A)$ possède au moins un sommet non isolé (puisque $p \geqslant 2$) et donc sa matrice d'adjacence n'est pas nulle.

$$\boxed{\text{Il existe une matrice carrée inversible } P \text{ appartenant à } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } P^{-1}AP \text{ soit une matrice diagonale différente de la matrice nulle.}}$$

□

▶ Dans la suite on note D cette matrice diagonale.

b) En déduire que $\operatorname{tr}(D) = 0$, $\operatorname{tr}(D^2) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 = 2m$.

Démonstration.

- D'après la question ***4.c)*** :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(D) &= \operatorname{tr}(A) && \textit{(car } A \textit{ et } D \textit{ sont semblables)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} 0 && \textit{(car le graphe } G(A) \textit{ est sans boucle, donc, pour tout } i \in [\![1,n]\!] \textit{, le sommet } i \textit{ n'est pas voisin de lui-même et donc } a_{i,i} = 0\textit{)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \operatorname{tr}(D) = 0.}$$

- D'après la question ***4.a)*** appliquée avec $B = A$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(A^2) &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} a_{j,i} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j}^2 && \textit{(}G(A) \textit{ est non orienté donc } a_{j,i} = a_{i,j}\textit{)} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} && \textit{(}a_{i,j} \in \{0,1\} \textit{ donc } a_{i,j}^2 = a_{i,j}\textit{)} \\
&= 2m && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.a)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

De plus, D^2 et A^2 sont semblables.

$$\boxed{\text{D'après la question } \textbf{\textit{4.c)}} : \mathrm{tr}(D^2) = \mathrm{tr}(A^2) = 2m.}$$

□

▶ *On suppose dans la suite que P est telle que les éléments diagonaux de D, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ vérifient $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$. On pose $\theta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \lambda_k$.*

Commentaire

Montrons qu'un tel choix de matrice P est toujours possible. Partons d'une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de D.
Il existe σ une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ telle que :

$$\left|\lambda_{\sigma(1)}\right| \geqslant \cdots \geqslant \left|\lambda_{\sigma(n)}\right|$$

Numérotons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice P et notons $\tilde{P}$ la matrice obtenue en concaténant les colonnes $C_{\sigma(1)}, \ldots, C_{\sigma(n)}$ dans cet ordre. La matrice $\tilde{P}$ est, tout comme la matrice P, inversible : elle a été obtenue en permutant les colonnes de P.
Par formule de changement de base, la matrice $\tilde{D} = \tilde{P}^{-1}A\tilde{P}$ est diagonale et ses coefficients diagonaux sont, dans cet ordre, $\lambda_{\sigma(1)}, \ldots, \lambda_{\sigma(n)}$. Ainsi, la matrice $\tilde{P}$ convient.

13. a) Soit k un sommet isolé. Montrer que $E_k \in \ker(A)$.
En déduire que $\dim(\ker(A)) \geqslant n - p$ puis que, si $p < n$, $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.

Démonstration.

- Le vecteur E_k étant le k^{e} vecteur de la base canonique, il suit que AE_k est la k^{e} colonne de la matrice A. Ainsi :

$$AE_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}$$

Or, puisque k est un sommet isolé, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $a_{j,k} = 0$.

$$\boxed{\text{On a } AE_k = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \text{ donc } E_k \in \ker(A).}$$

- Notons $\overline{I}$ le complémentaire de I dans $[\![1,n]\!]$. Autrement dit, $\overline{I}$ est l'ensemble des sommets isolés de $G(A)$.
Les propriétés suivantes sont vérifiées :
  × la famille $\mathcal{F} = (E_k)_{k \in \overline{I}}$ est libre comme sous-famille de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui est libre,

× $\text{Card}(\mathcal{F}) = \text{Card}\left(\overline{I}\right) = n - p$ (il y a $n-p$ sommets isolés),

× d'après le point précédent, pour tout $k \in \overline{I}$, $E_k \in \ker(A)$.

On a donc construit une famille libre de cardinal $n-p$ dans $\ker(A)$, ce qui implique :

$$\boxed{\dim(\ker(A)) \geqslant n - p}$$

- Supposons : $p < n$. Alors $\dim(\ker(A)) > 0$ et donc 0 est valeur propre de A.
  Plus précisément, $\dim(\ker(A)) \geqslant n - p$ donc 0 apparaît au moins $n-p$ fois sur la diagonale de la matrice D.
  Ainsi, parmi les nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, au moins $n-p$ d'entre eux sont nuls.
  Notons q le premier indice tel que $\lambda_q = 0$. Autrement dit : $q = \min\left(\{k \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_k = 0\}\right)$.

  × Par construction de P, on a $|\lambda_1| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|$. En particulier :

  $$0 = |\lambda_q| \geqslant |\lambda_{q+1}| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n| \geqslant 0$$

  d'où

  $$\lambda_q = \lambda_{q+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

  × Supposons $q > p+1$. Alors, par minimalité de q, on a $\lambda_{q-1} \neq 0$ (on a bien $q - 1 \in [\![1,n]\!]$ puisque $n \geqslant q > p+1 \geqslant 3$). On en déduit que

  $$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_{q-1}| > 0$$

  et donc

  $$\forall k \in [\![1, q-1]\!],\ \lambda_k \neq 0$$

  On a donc au plus $n - q + 1$ termes nuls sur la diagonale de D (les nombres $\lambda_q, \ldots, \lambda_n$).
  Or, $q > p+1$ donc $n - q + 1 < n - p$. Cela contredit le fait que 0 apparaît au moins $n-p$ fois sur la diagonale de D. C'est donc absurde.

  $$\boxed{\text{D'où } q \leqslant p+1 \text{ et } \lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0.}$$

□

Commentaire

Nous avons utilisé dans la preuve précédente le fait suivant : le vecteur E_k étant le k^{e} vecteur de la base canonique, il suit que AE_k est la k^{e} colonne de la matrice A. Il s'agit d'un raccourci calculatoire très pratique à connaître. Détaillons une preuve de ce fait.
Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Par produit matriciel :

$$\begin{aligned}
AE_k &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} [A]_{1,j}[E_k]_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} [A]_{n,j}[E_k]_j \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} [A]_{1,k}[E_k]_k \\ \vdots \\ [A]_{n,k}[E_k]_k \end{pmatrix} && \textit{(car, pour tout } j \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\},\ [E_k]_j = 0\textit{)} \\
&= \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix} && \textit{(car, pour tout } i \in [\![1,n]\!],\ [A]_{i,k} = a_{i,k} \textit{ et } [E_k]_k = 1\textit{)}
\end{aligned}$$

b) Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m$ puis que $0 < \theta < \sqrt{2m}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} 2m &= \operatorname{tr}(D^2) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{12.b)}}\textit{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 + \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{13.a)}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = 2m.}$$

- Montrons : $\theta > 0$. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons : $\theta \leqslant 0$.
  Par définition du maximum, on a : pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_k \leqslant \theta \leqslant 0$.
  Par sommation de ces inégalités, on obtient :

$$\operatorname{tr}(D) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \leqslant 0$$

  Or, d'après la question ***12.b)***, $\operatorname{tr}(D) = 0$. Il y a donc égalité dans l'inégalité précédente, ce qui ne peut arriver que si tous les λ_k sont nuls. Ceci implique que D est la matrice nulle, ce qui contredit la question ***12.a)***. C'est absurde.

$$\boxed{\text{D'où : } \theta > 0.}$$

- Notons q un entier de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $\lambda_q = \theta$.
  × Montrons qu'il existe $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{q\}$ tel que $\lambda_k \neq 0$ en raisonnant par l'absurde.
  Supposons que pour tout $k \in [\![1, n]\!] \setminus \{q\}$, $\lambda_k = 0$.
  On a alors, d'après le point précédent :

$$0 = \operatorname{tr}(D) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \lambda_q = \theta > 0$$

  C'est absurde.
  × Soit $r \in [\![1, n]\!]$ un entier distinct de q et vérifiant $\lambda_r \neq 0$.
  Tous les termes de la somme étant positifs, on a :

$$2m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 \geqslant \lambda_q^2 + \lambda_r^2 > \theta^2$$

$$\boxed{\text{Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur } [0, +\infty[\text{, il vient : } \sqrt{2m} > |\theta| = \theta.}$$

□

Commentaire

L'encadrement avec des inégalités larges est beaucoup plus facile à montrer. Cette question est à considérer comme difficile car il faut prendre des initiatives pour obtenir les inégalités strictes demandées.

c) Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_r$ des réels. Montrer que : $\sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant r} 2x_i x_j \leqslant \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant r} (x_i^2 + x_j^2)$.

En déduire que $\left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i\right)^2 \leqslant r \left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i^2\right)$.

Démonstration.

- Soit $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$. Comme $(x_i - x_j)^2 \geqslant 0$, $x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2 \geqslant 0$ et donc $2x_i x_j \leqslant x_i^2 + x_j^2$.
On somme ces inégalités pour tous les couples $(i,j) \in [\![1, r]\!]^2$:

$$\boxed{\text{On obtient : } \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} 2x_i x_j \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} (x_i^2 + x_j^2).}$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right) \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} x_i x_j \\
&\leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} \frac{1}{2}(x_i^2 + x_j^2) && \textit{(d'après ce qui précède)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} x_i^2\right) + \left(\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} x_j^2\right)\right) && \textit{(par linéarité de la somme)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} x_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} x_j^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{2} \times 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} x_i^2 && \textit{(par symétrie)} \\
&= r \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right) && \textit{(car } \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right) \textit{ ne dépend pas de } j\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)^2 \leqslant r \left(\sum_{i=1}^{r} x_i^2\right).}$$

□

Commentaire

L'égalité $\left(\sum\limits_{i=1}^{r} x_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{r} x_j\right) = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant r} x_i x_j$ n'a sans doute pas besoin d'être détaillée dans un sujet difficile comme celui-ci, puisque ce n'est pas le cœur de la question et il faut donc la connaître.

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right) &= \sum_{j=1}^{r} \left(\left(\sum_{i=1}^{r} x_i\right) x_j\right) && \textit{(par linéarité de la somme sur } j\textit{)} \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} x_i x_j\right) && \textit{(par linéarité de la somme sur } i\textit{)} \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant r} x_i x_j
\end{aligned}$$

d) En conclure que $\mathcal{E}(A) \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}$.

Démonstration.
Numérotons $x_1, \dots, x_p$ les réels $|\lambda_1|, \dots, |\lambda_p|$ de telle sorte que $x_p = |\theta|$.
Remarquons alors que, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $x_k^2 = \lambda_k^2$.
D'après la question ***13.b)***, $|\theta| = \theta$ et

$$2m = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 = \theta^2 + \sum_{i=1}^{p-1} x_i^2$$

d'où :

$$(p-1)(2m-\theta^2) = (p-1)\sum_{i=1}^{p-1} x_i^2$$

et, d'après la question ***13.c)*** appliquée avec $r = p-1 \geqslant 1$ (car $p \geqslant 2$) :

$$(p-1)\sum_{i=1}^{p-1} x_i^2 \geqslant \left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\right)^2$$

De plus :

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{p-1} x_i\right)^2 &= \left(\left(\sum_{i=1}^{p} x_i\right) - x_p\right)^2 \\
&= \left(\left(\sum_{k=1}^{p} |\lambda_k|\right) - \theta\right)^2 \\
&= (\mathcal{E}(A) - \theta)^2 && \textit{(car les autres valeurs propres sont nulles d'après la question } \textbf{\textit{13.a)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

D'où :

$$(p-1)(2m-\theta^2) \geqslant (\mathcal{E}(A)-\theta)^2$$

On vérifie alors :
× $p-1 \geqslant 0$ car $p \geqslant 2$,
× $2m - \theta^2 = \sum_{k=1}^{p-1} x_k^2 \geqslant 0$,
× $\mathcal{E}(A) - \theta = \sum_{i=1}^{p-1} x_i \geqslant 0$ car tous les x_i sont positifs.

Ainsi, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$:

$$\boxed{\mathcal{E}(A) \leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)}.}$$

□

14. On admet qu'on peut choisir la matrice P de la question ***12.a)*** de sorte que $P^{-1} = {}^tP$.
On pose alors $Q = {}^tP$.
Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ une matrice colonne appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = QX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

- ▶ *On admet que si M est une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et Z une matrice colonne appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(MZ) = {}^tZ{}^tM$.*
- ▶ *Si U et V sont deux matrices colonnes appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tUV$ est une matrice carrée appartenant à $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$, on l'identifie à son unique coefficient. Donc ${}^tUV \in \mathbb{R}$.*

Commentaire

Une matrice inversible P vérifiant $P^{-1} = {}^tP$ est appelée *matrice orthogonale*.
Cette notion d'orthogonalité provient d'un *produit scalaire* sur l'espace des vecteurs colonnes.
Les produits scalaires sont au programme du parcours ECG en maths approfondies, mais pas en maths appliquées.
Au programme de maths appliquées figure le résultat suivant : si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique (réelle), alors A est diagonalisable. Ce théorème est appelé *théorème spectral* et est en fait plus précis : A est diagonalisable et il existe une base *orthonormée* de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. On peut le reformuler de la manière suivante : A est semblable à une matrice diagonale via une matrice de passage *orthogonale*.
On démontre dans les questions ***14.a)***, ***14.b)*** et ***14.c)*** plusieurs résultats élémentaires sur les matrices symétriques qui sont une conséquence de ce théorème spectral.

a) Montrer que $Q^{-1} = {}^tQ$ puis que $A = {}^tQDQ$ et ${}^tYY = {}^tXX$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$ {}^tQQ = {}^t({}^tP)\,{}^tP = P\,{}^tP = PP^{-1} = I_n $$

donc Q est inversible et $Q^{-1} = {}^tQ$.
Ensuite :

$$ {}^tQDQ = {}^t({}^tP)D\,{}^tP = PDP^{-1} = P(P^{-1}AP)P^{-1} = A \qquad (\text{car } P^{-1}AP = D) $$

Enfin :

$$ {}^tYY = {}^t(QX)QX = {}^tX{}^tQQX = {}^tXI_nX = {}^tXX $$

$$ \boxed{\text{On a bien : } Q^{-1} = {}^tQ,\ A = {}^tQDQ \text{ et } {}^tYY = {}^tXX.} $$

□

b) Montrer que ${}^tXAX = {}^tYDY = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$ {}^tYDY = {}^t(QX)DQX = {}^tX{}^tQDQX = {}^tXAX \qquad \textit{(car } {}^tQDQ = A \textit{ d'après la question } \textbf{\textit{14.a)}}\textit{)} $$

Ensuite :

$$ DY = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} $$

et

$$ {}^tYDY = \begin{pmatrix} y_1 & \ldots\ldots & y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 y_1 \\ \vdots \\ \lambda_n y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \qquad (\text{en utilisant l'identification de } \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R}) \text{ à } \mathbb{R}) $$

$$ \boxed{\text{On a bien : } {}^tXAX = {}^tYDY = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2.} $$

□

c) En remarquant que $\sum_{k=1}^{n} y_k^2 = {}^tYY$, en déduire que ${}^tXAX \leqslant \theta \, {}^tXX$.

Démonstration.
Vérifions la première égalité :

$$ {}^tYY = \begin{pmatrix} y_1 \ \dots\dots \ y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} y_k^2 $$

Par définition de θ :

$$ \forall k \in [\![1, n]\!], \ \lambda_k \leqslant \theta $$

et donc,

$$ \forall k \in [\![1, n]\!], \ \lambda_k y_k^2 \leqslant \theta y_k^2 \qquad (\text{car } y_k^2 \geqslant 0) $$

En sommant toutes ces inégalités, on obtient :

$$ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 \leqslant \theta \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \quad (*) $$

Ainsi,

$$ \begin{aligned} {}^tXAX &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k^2 && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{14.b)}}\textit{)} \\ &\leqslant \theta \sum_{k=1}^{n} y_k^2 && \textit{(d'après } (*)\textit{)} \\ &= \theta \, {}^tYY \\ &= \theta \, {}^tXX && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{14.a)}}\textit{)} \end{aligned} $$

$$ \boxed{\text{On obtient bien : } {}^tXAX \leqslant \theta \, {}^tXX.} $$

□

15. Soit U la matrice colonne appartenant à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont le $i$ème coefficient vaut 1 si i n'est pas isolé et 0 sinon.

a) Montrer que ${}^tUAU = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{i,j} = 2m$. En déduire que $\dfrac{2m}{p} \leqslant \theta$.

Démonstration.
Notons $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. D'après l'énoncé, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $u_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a alors, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$ \begin{aligned} [AU]_k &= \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} u_j \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I}}^{n} a_{k,j} \underbrace{u_j}_{=1} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin I}}^{n} a_{k,j} \underbrace{u_j}_{=0} \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \in I}}^{n} a_{k,j} \end{aligned} $$

D'où :

$$\begin{aligned}
{}^tUAU &= \sum_{i=1}^{n} [{}^tU]_i[AU]_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\in I}}^{n} a_{i,j} \right) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i\in I}}^{n} \left(\underbrace{u_i}_{=1} \sum_{\substack{j=1 \\ j\in I}}^{n} a_{i,j} \right) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\notin I}}^{n} \left(\underbrace{u_i}_{=0} \sum_{\substack{j=1 \\ j\in I}}^{n} a_{i,j} \right) \\
&= \sum_{\substack{i=1 \\ i\in I}}^{n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\in I}}^{n} a_{i,j} \right) \\
&= \sum_{(i,j)\in I^2} a_{i,j} \\
&= 2m && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{11.a)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

On applique la question ***14.c)*** avec $X = U$, on obtient alors :

$$^tUAU \leqslant \theta\ {}^tUU$$

Or,

$$^tUU = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \sum_{k\in I} 1 = p$$

On en déduit que $2m \leqslant \theta p$.

$$\boxed{\text{Finalement, puisque } p > 0, \text{ on a bien : } \frac{2m}{p} \leqslant \theta.}$$

□

b) Établir que : $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \dfrac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$.

Démonstration.

- Démontrons la première inégalité :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{p} &\iff 1 \leqslant \sqrt{\frac{2m}{p}} \\
&\iff 1 \leqslant \frac{2m}{p}
\end{aligned}$$

  L'inégalité $1 \leqslant \dfrac{2m}{p}$ étant vraie d'après la question ***11.b)***, on en déduit :

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{2m}}{p}}$$

- Démontrons maintenant la deuxième inégalité :

$$\frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}} \iff \frac{2m}{p} \leqslant \theta$$

L'inégalité $\dfrac{2m}{p} \leqslant \theta$ étant vraie d'après la question ***15.a)***, on en déduit :

$$\boxed{\frac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \frac{\theta}{\sqrt{2m}}}$$

- Démontrons enfin la dernière inégalité :

$$\frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1 \iff \theta \leqslant \sqrt{2m}$$

L'inégalité $\theta \leqslant \sqrt{2m}$ étant vraie d'après la question ***13.b)***, on en déduit :

$$\boxed{\frac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1}$$

□

16. a) Étudier la fonction $F : x \mapsto x + \sqrt{(p-1)(1-x^2)}$ sur $[0,1]$.

Démonstration.
La fonction F est de la forme $F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}} + \sqrt{p-1}\sqrt{u}$ où $u : x \mapsto 1 - x^2$ vérifie :
× u est dérivable sur $[0,1]$,
× pour tout $x \in [0,1[$, $u(x) > 0$ et $u(1) = 0$.
De plus, rappelons que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.
Ainsi, par somme et composition, la fonction F est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$.
Soit $x \in [0,1[$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= 1 + \sqrt{p-1}\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \\ &= 1 - \frac{x\sqrt{p-1}}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{p-1}}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{1-x^2} > 0$:

$$\begin{aligned} F'(x) > 0 &\iff \sqrt{1-x^2} - x\sqrt{p-1} > 0 \\ &\iff \sqrt{1-x^2} > x\sqrt{p-1} \\ &\iff 1 - x^2 > x^2(p-1) && \textit{(car } x \mapsto x^2 \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ &\iff 1 > px^2 \\ &\iff x^2 < \frac{1}{p} && \textit{(car } p > 0\textit{)} \\ &\iff \sqrt{x^2} < \frac{1}{\sqrt{p}} && \textit{(car } x \mapsto \sqrt{x} \textit{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[\textit{)} \\ &\iff |x| < \frac{1}{\sqrt{p}} \\ &\iff -\frac{1}{\sqrt{p}} < x < \frac{1}{\sqrt{p}} \\ &\iff 0 \leqslant x < \frac{1}{\sqrt{p}} && \textit{(car } x \geqslant 0 > -\frac{1}{\sqrt{p}}\textit{)} \end{aligned}$$

De plus : $F'(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ (car $x \geqslant 0$).

Dressons maintenant le tableau de variations de F sur $[0, 1]$.

x	0		$\frac{1}{\sqrt{p}}$		1
Signe de $F'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de F	$\sqrt{p-1}$	↗	$\sqrt{p}$	↘	1

$\square$

b) En déduire que $\mathcal{E}(A) \leqslant \sqrt{2m}\ F\left(\dfrac{\sqrt{2m}}{p}\right)$, c'est-à-dire que :

$$\mathcal{E}(A) \leqslant \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} \qquad (1)$$

Démonstration.
On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A) &\leqslant \theta + \sqrt{(p-1)(2m-\theta^2)} && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{13.d)}}\textit{)} \\
&\leqslant \theta + \sqrt{2m(p-1)\left(1 - \frac{\theta^2}{2m}\right)} \\
&= \theta + \sqrt{2m}\sqrt{(p-1)\left(1 - \left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)^2\right)} \\
&= \sqrt{2m}\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}} + \sqrt{(p-1)\left(1 - \left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)^2\right)}\right) \\
&= \sqrt{2m}\ F\left(\frac{\theta}{\sqrt{2m}}\right)
\end{aligned}$$

De plus :

× d'après la question ***16.a)***, la fonction F est décroissante sur $\left[\frac{1}{\sqrt{p}}, 1\right]$,

× d'après la question ***15.b)***, $\dfrac{1}{\sqrt{p}} \leqslant \dfrac{\sqrt{2m}}{p} \leqslant \dfrac{\theta}{\sqrt{2m}} \leqslant 1$.

D'où : $F\left(\dfrac{\theta}{\sqrt{2m}}\right) \leqslant F\left(\dfrac{\sqrt{2m}}{p}\right)$.

En multipliant cette inégalité par $\sqrt{2m} \geqslant 0$ et par transitivité, on obtient :

$$\mathcal{E}(A) \leqslant \sqrt{2m}\ F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2m}\ F\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right) &= \sqrt{2m}\left(\frac{\sqrt{2m}}{p} + \sqrt{(p-1)\left(1-\left(\frac{\sqrt{2m}}{p}\right)^2\right)}\right) \\
&= \frac{2m}{p} + \sqrt{2m}\ \sqrt{(p-1)\left(1-\frac{2m}{p^2}\right)} \\
&= \frac{2m}{p} + \sqrt{2m}\ \sqrt{(p-1)\ \frac{p^2-2m}{p^2}} \\
&= \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \mathcal{E}(A) \leqslant \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)}.}$$

□

17. On suppose dans cette question que A est la matrice d'adjacence d'un graphe complet de sommets $1, \ldots, n$ donc $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $p = n$.

a) Représenter la matrice A.

Démonstration.
Dans un graphe complet (supposé ici sans boucle), chaque sommet est relié à tous les autres sommets (et est donc de degré $n-1$).

$$\boxed{\text{Pour un tel graphe, } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

□

b) Montrer que -1 est une valeur propre de A et que le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

Démonstration.
Tout d'abord :

$$\mathrm{rg}(A-(-1)I_n) = \mathrm{rg}(A+I_n) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$$

En effet, la première colonne est non nulle et toutes les autres colonnes sont égales à la première.
On en déduit que $\mathrm{rg}(A+I_n) < n$ et donc -1 est une valeur propre de A.
Ensuite, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\ker(A+I_n)) + \mathrm{rg}(A+I_n) = \dim(E_{-1}(A)) + \mathrm{rg}(A+I_n) = n$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \dim(E_{-1}(A)) = n-1.}$$

□

c) Établir aussi que $n-1$ est une valeur propre de A. En déduire que $\mathcal{E}(A) = 2(n-1)$ et que l'inégalité (1) est alors une égalité.

Démonstration.
On remarque :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix} = (n-1) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Or, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est non nul, donc $n-1$ est une valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $(n-1)$.
On a nécessairement :

$$\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_{n-1}(A)) \leqslant n$$

sinon on pourrait construire (par théorème de concaténation) une famille libre de cardinal strictement plus grand que n dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ce qui serait absurde.
Or, $\dim(E_{-1}(A)) = n-1$ d'après la question ***17.b)*** et donc $\dim(E_{n-1}(A)) \leqslant 1$.
Puisque $n-1$ est valeur propre de A, on a aussi $\dim(E_{n-1}(A)) \geqslant 1$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \dim(E_{n-1}(A)) = 1 \text{ et } \mathcal{E}(A) = (n-1) \times |-1| + 1 \times |n-1| = 2(n-1).}$$

De plus, comme $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$ et $p = n$:

$$\begin{aligned} \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)} &= \frac{n(n-1)}{n} + \frac{1}{n}\sqrt{(n-1)n(n-1)(n^2-n(n-1))} \\ &= n-1+\frac{1}{n}\sqrt{(n-1)^2\ n^2(n-(n-1))} \\ &= n-1+\frac{1}{n}\sqrt{(n-1)^2\ n^2} \\ &= n-1+\frac{1}{n}(n-1)n \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le graphe complet à } n \text{ sommets est un cas d'égalité dans l'inégalité (1).}}$$

□

Commentaire

L'objet de la question ***17*** est de fournir un exemple explicite de graphe où l'inégalité (1) devient une égalité.
Cela démontre que l'inégalité (1) est **optimale**.
En effet, on ne peut pas améliorer le majorant obtenu de l'énergie d'un graphe (c'est-à-dire trouver un nouveau majorant qui soit strictement plus petit que le précédent), sinon cette nouvelle inégalité serait fausse pour le graphe complet à n sommets.
Lorsque l'on démontre une inégalité (ici la majoration (1) de l'énergie d'un graphe), il faut toujours se demander si celle-ci est optimale.

Commentaire

Nous avons utilisé au cours de la preuve l'inégalité :

$$\dim(E_{-1}(A)) + \dim(E_{n-1}(A)) \leqslant n$$

Ce type d'inégalité (sur la somme des dimensions des sous-espaces propres d'une matrice), autrefois présente dans le programme de mathématiques en ECE, a disparu du programme officiel en 2022. Il faut donc la justifier à l'écrit. Nous avons opté dans ce corrigé pour une justification concise faisant apparaître l'ingrédient principal (le théorème de concaténation) et le type de raisonnement employé (par l'absurde).
Pour permettre une bonne compréhension, nous détaillons ci-dessous la preuve de l'inégalité (dans un cadre un peu plus général), tout en spécifiant qu'un tel niveau de détails n'est certainement pas un attendu à l'écrit dans un tel sujet qui demande une forte prise d'initiative.
Supposons que la matrice A admette deux valeurs propres distinctes λ et μ.
Supposons :

$$\dim(E_{\lambda}(A)) + \dim(E_{\mu}(A)) > n$$

Posons $p = \dim(E_{\lambda}(A))$ et $q = \dim(E_{\mu}(A))$.
Soit $(U_1, \dots, U_p)$ une base de $E_{\lambda}(A)$ et soit $(V_1, \dots, V_q)$ une base de $E_{\mu}(A)$.
Les familles $(U_1, \dots, U_p)$ et $(V_1, \dots, V_q)$ sont deux familles libres constituées de vecteurs propres de A, associés à deux valeurs propres distinctes. Par théorème de concaténation, on en déduit que la famille $(U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q)$ est également libre. Ainsi, on a construit une famille libre de cardinal $p+q$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Or : $\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$ et $p+q > n$. C'est absurde. D'où :

$$\dim(E_{\lambda}(A)) + \dim(E_{\mu}(A)) \leqslant n$$

- *On note $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} |\lambda_k|$ et $\beta = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant p} |\lambda_k|$. On note aussi d le degré maximal des sommets du graphe $G(A)$.*

18. Écrire une fonction **Python** `degMax(A)` qui renvoie le maximum des degrés des sommets du graphe $G(A)$, celui-ci étant donné par sa matrice d'adjacence sous la forme du tableau `numpy A`.

Démonstration.

```
1  def degMax(A):
2      n = len(A)
3      d = 0
4      for i in range(n):
5          deg = 0
6          for j in range(n):
7              if A[i,j] == 1: # si j est un voisin de i
8                  deg += 1
9          # deg contient le degré du sommet i
10         if deg > d:
11             d = deg
12     return d
```

Détaillons le fonctionnement de cette fonction **Python**.

- × On parcourt tous les sommets `i` à l'aide de la boucle `for` qui débute en ligne 4.
- × Pour chaque sommet `i`, on calcule son degré à l'aide d'une nouvelle boucle for (lignes 6 à 8). On stocke ce degré dans la variable `deg`.

× La variable `d` est initialisée à 0 et est (potentiellement) mise à jour à chaque nouveau calcul du degré d'un sommet. A chaque tour de boucle, `d` contient le plus grand de tous les degrés qui ont été calculés jusqu'ici. En fin de boucle, puisque on a calculé les degrés de tous les sommets, `d` contient bien le maximum des degrés du graphe $G(A)$.

□

19. ***a)*** Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $|\lambda_j| \, (\alpha + \beta) \geqslant \lambda_j^2 + \alpha\beta$.

Démonstration.
Soit $j \in \{1, \ldots, p\}$.

$$\begin{aligned} |\lambda_j| \, (\alpha + \beta) \geqslant \lambda_j^2 + \alpha\beta & \iff 0 \geqslant |\lambda_j|^2 - |\lambda_j| \, (\alpha + \beta) + \alpha\beta \\ & \iff 0 \geqslant (|\lambda_j| - \alpha)(|\lambda_j| - \beta) \end{aligned}$$

Or, par définition de α et β : $0 \leqslant \alpha \leqslant |\lambda_j| \leqslant \beta$.
On en déduit : $|\lambda_j| - \alpha \geqslant 0$ et $|\lambda_j| - \beta \leqslant 0$.

$$\boxed{\text{D'où : } |\lambda_j| \, (\alpha + \beta) \geqslant \lambda_j^2 + \alpha\beta.}$$

□

b) En déduire que $(\alpha + \beta)\mathcal{E}(A) \geqslant \operatorname{tr}(A^2) + p\alpha\beta$, puis que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta}$.

Démonstration.
Sommons les inégalités de la question précédente pour j variant de 1 à p :

$$(\alpha + \beta) \sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| \geqslant \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^2 + \sum_{j=1}^{p} \alpha\beta = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^2 + p\alpha\beta$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^2 &= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 && \textit{(d'après la question \textbf{13.a)})} \\ &= \operatorname{tr}(A^2) && \textit{(d'après la question \textbf{5.b)})} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{p} |\lambda_j| &= \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| && \textit{(d'après la question \textbf{13.a)})} \\ &= \mathcal{E}(A) && \textit{(par définition)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{D'où : } (\alpha + \beta)\mathcal{E}(A) \geqslant \operatorname{tr}(A^2) + p\alpha\beta.}$$

De plus, A^2 et D^2 sont semblables donc, d'après la question ***4.c)*** : $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(D^2)$.
Enfin, d'après la question ***12.b)*** : $\operatorname{tr}(D^2) = 2m$.
D'où :

$$(\alpha + \beta)\mathcal{E}(A) \geqslant 2m + p\alpha\beta$$

De plus, $\alpha \geqslant 0$ et $\beta > 0$ car D n'est pas la matrice nulle.

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{E}(A) \geqslant \frac{2m + p\alpha\beta}{\alpha + \beta}.}$$

□

c) Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a \leqslant b^2$. Étudier les variations de $\varphi : t \mapsto \dfrac{a+bt}{b+t}$ sur $\mathbb{R}^+$.

Démonstration.
La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient de deux fonctions polynomiales dérivables sur $\mathbb{R}^+$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^+$ (car $b > 0$).
Soit $t \in \mathbb{R}^+$.

$$\varphi'(t) = \frac{b(b+t)-(a+bt)}{(b+t)^2} = \frac{b^2-a}{(b+t)^2} \geqslant 0 \qquad \textit{(car } a \leqslant b^2\textit{)}$$

$$\boxed{\text{Ainsi : la fonction } \varphi \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^+.}$$

□

d) Montrer que $2m \leqslant p\beta^2$. En déduire que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{\beta}$.

Démonstration.

- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} 2m &= \operatorname{tr}(D^2) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{12.b)}}\textit{)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{13.a)}}\textit{)} \\ &= \sum_{k=1}^{p} |\lambda_k|^2 \end{aligned}$$

  Ensuite, par définition de β, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $0 \leqslant |\lambda_k| \leqslant \beta$.
  Par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}^+$, pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, $|\lambda_k|^2 \leqslant \beta^2$.
  En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{p} |\lambda_k|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{p} \beta^2 = p\beta^2$$

$$\boxed{\text{D'où : } 2m \leqslant p\beta^2.}$$

- D'après la question ***19.b)*** :

$$\mathcal{E}(A) \geqslant \frac{2m+p\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

  Or :

$$\begin{aligned} \frac{2m+p\alpha\beta}{\alpha+\beta} &= p\,\frac{\frac{2m}{p}+\alpha\beta}{\alpha+\beta} \\ &= p\,\frac{a+b\alpha}{b+\alpha} && \textit{(où } a = \frac{2m}{p} \textit{ et } b = \beta\textit{)} \\ &= p\,\varphi(\alpha) \end{aligned}$$

et d'après la question ***19.c)*** : $\varphi(\alpha) \geqslant \varphi(0) = \dfrac{a}{b} = \dfrac{2m}{p\beta}$.

$$\boxed{\text{D'où : } \mathcal{E}(A) \geqslant \frac{2m}{\beta}.}$$

□

Commentaire

Si l'on souhaite seulement se débarrasser de α (comme c'est le cas dans cette question), on ne peut pas obtenir de meilleure minoration que $\varphi(\alpha) \geqslant \varphi(0)$ car $\alpha = 0$ est tout à fait possible dans ce contexte. En effet, on sait seulement que $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$, mais on ne sait pas si ce sont les seules valeurs propres nulles. Pour le dire autrement, on sait que $\dim(\ker(A)) \geqslant n - p$ mais on ne sait pas si $\dim(\ker(A)) = n - p$. Dans le cas où la dimension est en fait strictement supérieure à $n - p$, on a $\alpha = 0$.

20. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre pour une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \beta$.

a) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\beta\, |x_i| \leqslant d \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$.

Démonstration.
Soit $i \in \{1, \dots, n\}$.

Par définition de X, on a $AX = \lambda X$ et donc : $A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$.

Ainsi, en identifiant les coefficients en position i :

$$\lambda x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, x_k$$

D'où :

$$\begin{aligned}
|\lambda x_i| &= \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, x_k \right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}\, x_k| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\, |x_k| && \textit{(car } a_{i,k} \geqslant 0\textit{)} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \right) && \textit{(car, pour tout } k \in [\![1, n]\!],\ |x_k| \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|\textit{)} \\
&= \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \right) \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \\
&\leqslant d \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \right) && \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \deg(i) \leqslant d\textit{)}
\end{aligned}$$

De plus, $|\lambda x_i| = |\lambda|\, |x_i| = \beta\, |x_i|$.

$$\boxed{\text{Pour tout } i \in \{1, \dots, n\},\ \beta\, |x_i| \leqslant d \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|.}$$

□

b) En conclure que $\mathcal{E}(A) \geqslant \dfrac{2m}{d} \geqslant \dfrac{2m}{p-1}$ (2).

Démonstration.

- Fixons $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|x_i| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$.
  D'après l'inégalité de la question précédente avec cet entier i : $\beta\, |x_i| \leqslant d\, |x_i|$ $(*)$.
  Montrons que $|x_i| > 0$ en raisonnant par l'absurde.
  Supposons : $|x_i| = 0$.
  Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $0 \leqslant |x_j| \leqslant |x_i| = 0$ et donc $|x_j| = 0$.
  On en déduit que le vecteur propre X est nul. C'est absurde.
  On peut donc diviser $(*)$ par $|x_i|$ et on obtient $\beta \leqslant d$.
  En passant à l'inverse et en mutipliant par $2m$, on obtient :
  $$\boxed{\mathcal{E}(A) \geqslant \frac{2m}{d}}$$
- Montrons maintenant que $d \leqslant p-1$ en raisonnant par l'absurde.
  Supposons : $d \geqslant p$. Alors il existe un sommet qui possède au moins p voisins (nécessairement distincts de lui-même). On compte donc au moins $p+1$ sommets non isolés. Or, par définition de p, il y a exactement p sommets non isolés. C'est absurde.
  D'où, $0 < d \leqslant p-1$.
  En passant à l'inverse, on obtient : $\dfrac{1}{p-1} \leqslant \dfrac{1}{d}$.
  En multipliant par $2m \geqslant 0$, on a enfin :
  $$\boxed{\frac{2m}{d} \geqslant \frac{2m}{p-1}}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } \mathcal{E}(A) \geqslant \frac{2m}{d} \geqslant \frac{2m}{p-1}.}$$
□

c) Montrer que l'égalité dans (2) est réalisée pour la matrice A carrée appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ associée au graphe dont l'unique arête est $\{1, 2\}$.

Démonstration.
Écrivons la matrice d'adjacence de ce graphe par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} B & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & 0_{n-2} \end{pmatrix}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que les $n-2$ dernières colonnes de A sont nulles et que les deux premières colonnes sont non colinéaires, donc $\text{rg}(A) = 2$ et 0 est valeur propre de A de multiplicité $n-2$ (autrement dit, $\dim(\ker(A)) = n-2$).

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\mathrm{rg}(A-\lambda I_n) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right)$$

$$= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}\right) \qquad L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$= \mathrm{rg}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1-\lambda^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}}_{=M_\lambda}\right) \qquad L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1$$

On a obtenu la réduite de Gauss (échelonnée), que l'on note M_λ.
Ainsi :

$$\begin{aligned} \lambda \in \mathrm{Sp}(A) &\iff \text{la matrice } A-\lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \mathrm{rg}(A-\lambda I_n) < n \\ &\iff \mathrm{rg}(M_\lambda) < n \\ &\iff \text{la matrice } M_\lambda \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \text{l'un des coefficients diagonaux de } M_\lambda \text{ est nul} \\ &\iff 1-\lambda^2 = 0 \texttt{ OU } -\lambda = 0 \\ &\iff \lambda \in \{-1,0,1\} \end{aligned}$$

et donc :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{-1,0,1\}$$

Les valeurs propres -1 et 1 sont chacune de multiplicité 1 ($\dim(E_{-1}(A)) = \dim(E_1(A)) = 1$).
D'où : $\mathcal{E}(A) = 1 \times |-1| + 1 \times |1| + (n-2) \times |0| = 2$.
De plus, pour le graphe considéré : $m = 1$ (il y a une unique arête) et $p = 2$ (il y a exactement deux sommets non isolés : ceux qui sont reliés par l'unique arête du graphe).
D'où $\dfrac{2m}{p-1} = \dfrac{2 \times 1}{2-1} = 2$.

$$\boxed{\text{Le graphe à } n \text{ sommets dont l'unique arête est } \{1,2\} \text{ est un cas d'égalité dans l'inégalité (2).}}$$

□

Commentaire

Nous avons finalement démontré l'encadrement de l'énergie suivant :

$$\frac{2m}{p-1} \leqslant \mathcal{E}(A) \leqslant \frac{2m}{p} + \frac{1}{p}\sqrt{(p-1)2m(p^2-2m)}$$

De plus, nous avons montré que cet encadrement est optimal au sens où il existe un graphe vérifiant le cas d'égalité à gauche et un autre vérifiant le cas d'égalité à droite.
Remarquons que les deux graphes explicités sont radicalement différents.
Le cas d'égalité à droite est obtenu avec le graphe complet d'ordre n, qui est le graphe le plus connecté possible parmi tous les graphes vérifiant les conditions $m \geqslant 1$ et $n \geqslant p \geqslant 2$, c'est-à-dire parmi les graphes possédant au moins une arête (en effet, si il y a une arête elle relie au moins 2 sommets et donc on a nécessairement $p \geqslant 2$).
Le cas d'égalité à gauche est quant à lui obtenu avec le graphe le moins connecté possible parmi tous les graphes possédant au moins une arête.
A l'aune des résultats démontrés dans ce sujet, on peut faire l'hypothèse que l'énergie d'un graphe soit une mesure de son « taux de connection » : plus un graphe est connecté et plus son énergie est grande.
Pour appuyer cette intuition, remarquons pour terminer que l'énergie d'un graphe complètement déconnecté (qui ne possède aucune arête) est nulle. En effet, sa matrice d'adjacence est la matrice nulle et toutes ses valeurs propres sont nulles.

Aide-mémoire Python

On suppose que l'on a exécuté `import numpy as np, numpy.linalg as al` en début de session.

- Si `T` est un tableau `numpy`, `np.shape(T)` renvoie le nombre de lignes et le nombre de colonnes de T, dans cet ordre, sous la forme d'un couple.
- `np.zeros([p,q])` crée un tableau `numpy` à p lignes et q colonnes ne contenant que des 0.
- `np.ones([p,q])` crée un tableau `numpy` à p lignes et q colonnes ne contenant que des 1.
- `np.eye(p)` crée un tableau `numpy` à p lignes et p colonnes ne contenant que des 1 sur sa diagonale et des 0 ailleurs.
- La fonction `al.eigvals`, appliquée à un tableau `numpy` représentant une matrice symétrique A, renvoie le tableau des coefficients d'une matrice diagonale semblable à A.