Planche HEC : Intégrales impropres

Exercice avec préparation 1
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^3)^{n+1}}$$

1. Cours : développement limité de $\ln(1+x)$ pour x au voisinage de 0.

2. Montrer la convergence de l'intégrale J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et préciser son signe.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x$ converge et exprimer sa valeur en fonction de J_n.

4. En déduire la monotonie de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, J_{n+1} = \dfrac{3n+2}{3n+3} J_n$.

5. On admet que $J_0 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. Écrire en **Python** une fonction prenant en argument un entier n et qui renvoie la liste des $n+1$ premiers termes de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$.

a) À l'aide de développements limités usuels, montrer que $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{9n^2}$.

b) En déduire qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A n^{-\frac{1}{3}}$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. D'après le cours :

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2).}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $h_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^3)^{n+1}}$ est continue et strictement positive sur $[0, +\infty[$ donc J_n est impropre en $+\infty$.

De plus :

$$h_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n+3}}$$

Or, $3n+3 \geqslant 3$ donc l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3n+3}}\mathrm{d}x$ converge.

Ainsi, par critère de comparaison pour les intégrales généralisées de fonctions continues et positives :

$$\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge.}}$$

De plus, par positivité de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant) :

$$\boxed{J_n > 0.}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $B \geqslant 0$. On procède par IPP :

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \dfrac{x}{3} & u'(x) = \dfrac{1}{3} \\[2ex] v(x) = -\dfrac{1}{(n+1)(1+x^3)^{n+1}} & v'(x) = \dfrac{3x^2}{(1+x^3)^{n+2}} \end{array} \right.$$

Cette IPP est valide car u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^B \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x &= \int_0^B \frac{x}{3}\frac{3x^2}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{(n+1)(1+x^3)^{n+1}}\frac{x}{3} \right]_0^B + \frac{1}{3(n+1)}\int_0^B \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{B}{3(n+1)(1+B^3)^{n+1}} + \frac{1}{3(n+1)}\int_0^B \frac{1}{(1+x^3)^{n+1}}\mathrm{d}x \\
&\underset{B\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3(n+1)}J_n
\end{aligned}$$

Ceci prouve que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x$ converge et :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{3(n+1)}J_n}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente et par linéarité de l'intégrale :

$$\frac{1}{3(n+1)}J_n = \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^3)-1}{(1+x^3)^{n+2}}\mathrm{d}x = J_n - J_{n+1}$$

On tire de cette relation :

$$\boxed{J_{n+1} = \frac{3n+2}{3n+3} J_n.}$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n > 0$ et donc :

$$\frac{J_{n+1}}{J_n} = \frac{3n+2}{3n+3} < 1$$

$$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (J_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$$

5. On propose la fonction **Python** suivante :

```
def listeJ(n):
    liste = [2*np.pi/(3*np.sqrt(3))]
    for k in range(n):
        liste.append((3*k+2)/(3*k+3) * liste[k])
    return liste
```

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \frac{1}{3}\ln(n+1) + \ln(J_{n+1}) - \frac{1}{3}\ln(n) - \ln(J_n) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{J_{n+1}}{J_n}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(\frac{3n+2}{3n+3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{3n+3}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + \left(-\frac{1}{3n+3} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= \frac{1}{n(3n+3)} - \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2(3n+3)^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$n^2(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$

$$\boxed{\text{Autrement dit : } \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{9n^2}.}$$

b) D'après la question précédente, la série $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge. Ainsi, la suite $(\ln(u_n))$ converge. On note ℓ sa limite. Par continuité de l'exponentielle, la suite (u_n) converge vers $A = \mathrm{e}^{\ell} > 0$.

Puisque $A > 0$, on a : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A$. Or, $u_n = n^{\frac{1}{3}} J_n$ et donc

$$\boxed{J_n \underset{n\to+\infty}{\sim} A n^{-\frac{1}{3}}.}$$