Planche HEC : Intégration sur un segment

Exercice avec préparation 1

1. **Question de cours** : énoncé des inégalités des accroissements finis.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On définit la fonction :

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_{x^2}^{x^4} f(t)\ dt \end{array}$$

2. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on : $x^2 \leqslant x^4$?

3. ***a)*** Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Que vaut $g(1)$?

b) Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in \,]0,1]$, $|g(x)| \leqslant M\,|x^3 - x|$.

c) Montrer que g est prolongeable par continuité en 0. On appelle encore g la fonction prolongée. Préciser la valeur de $g(0)$.

4. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $g'(x)$.
On admet provisoirement que g est dérivable en 0 et : $g'(0) = -f(0)$.

5. Applications :

a) Soit f telle que : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = 1$. Vérifier les résultats obtenus ci-dessus et tracer la courbe représentative de g.

b) `(Cubes uniquement)` Soit f une densité de probabilité, nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$.

(i) Étudier le signe de g et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

(ii) On admet de plus que g' s'annule seulement en deux valeurs α et β sur $\mathbb{R}_+^*$.
Tracer l'allure de la courbe représentative de g.

6. On va maintenant prouver que g est dérivable en 0. On note, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

a) Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour F en 0.

b) En déduire des équivalents quand x tend vers 0 de $F(x^4)$ et de $F(x^2)$, et conclure.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $t \in I$, $|f'(t)| \leqslant M$. Alors, pour tout $(x, y) \in I^2$:

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M\,|x - y|$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} x^2 \leqslant x^4 &\iff x^4 - x^2 \geqslant 0 \\ &\iff x^2(x^2 - 1) \geqslant 0 \\ &\iff x^2(x-1)(x+1) \geqslant 0 \\ &\iff x \in]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

3. ***a)*** La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc elle admet une primitive F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a bien $x^2 \geqslant 0$ et $x^4 \geqslant 0$. D'où :

$$g(x) = \frac{1}{x} \left[\ F(t)\ \right]_{x^2}^{x^4} = \frac{1}{x}\left(F(x^4) - F(x^2)\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, par composition et par quotient, } g \text{ est bien continue sur } \mathbb{R}_+^*. \\ \text{De plus, } g(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\ dt = 0.\end{array}}$$

b) La fonction f est continue sur $[0, 1]$ donc elle est bornée sur $[0, 1]$. Soit $M > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, 1]$, $|f(t)| \leqslant M$.
Soit $x \in]0, 1]$. On a alors : $0 \leqslant x^4 \leqslant x^2 \leqslant 1$. D'où :

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \frac{1}{x}\left|\int_{x^2}^{x^4} f(t)\ dt\right| \\ &= \frac{1}{x}\left|\int_{x^4}^{x^2} f(t)\ dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_{x^4}^{x^2} |f(t)|\ dt && \textit{(par inégalité triangulaire, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant)} \\ &\leqslant \frac{1}{x}\int_{x^4}^{x^2} M\ dt && \textit{(par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant)} \\ &\leqslant \frac{1}{x} M(x^2 - x^4) \\ &\leqslant M(x - x^3) \\ &= M\left|x^3 - x\right| \end{aligned}$$

c) Tout d'abord, par continuité de la fonction valeur absolue en 0 :

$$\lim_{x \to 0} \left|x^3 - x\right| = 0$$

Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$$

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est prolongeable par continuité en 0 et } g(0) = 0.}$$

4. On a déjà vu que, pour tout $x > 0$:

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(F(x^4) - F(x^2)\right)$$

Ainsi, par composition et par quotient, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{x^2}\left(F(x^4) - F(x^2)\right) + \frac{1}{x}\left(4x^3 f(x^4) - 2x f(x^2)\right) \\ &= -\frac{1}{x} g(x) + 2\left(2x^2 f(x^4) - f(x^2)\right) \end{aligned}$$

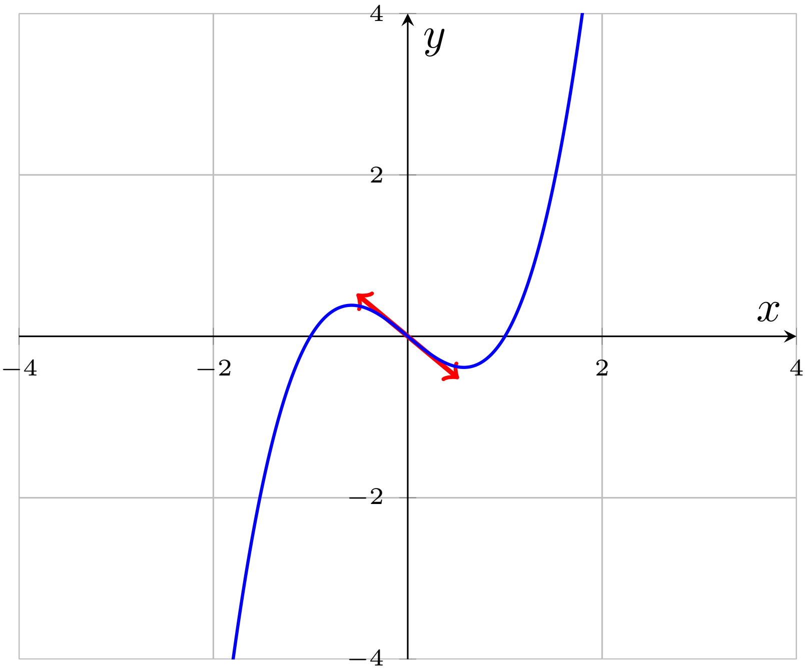
5. a) Soit $x > 0$.

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_{x^2}^{x^4} 1 \; dt = \frac{1}{x}(x^4 - x^2) = x^3 - x = x(x-1)(x+1)$$

La fonction g est polynomiale. En particulier, g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a bien $g(0) = g(1) = 0$. De plus :

$$g'(x) + \frac{1}{x} g(x) = 3x^2 - 1 + \frac{1}{x}(x^3 - x) = 4x^2 - 2 = 2(2x^2 - 1)$$

donc la relation trouvée en question *4* est bien vérifiée.



b) (i) Soit $x > 1$. On a alors :

× $0 \leqslant x^2 < x^4$

× f est continue et strictement positive sur le segment $[x^2, x^4]$

Ainsi, par positivité de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant), on a :

$$\int_{x^2}^{x^4} f(t) \; dt > 0$$

et donc $g(x) > 0$.

Soit $0 < x < 1$. On a alors :

× $0 \leqslant x^4 < x^2$

× f est continue et strictement positive sur le segment $[x^4, x^2]$

Ainsi, par positivité de l'intégrale (les bornes étant rangées dans l'ordre croissant), on a :

$$\int_{x^4}^{x^2} f(t)\ dt > 0$$

et donc $g(x) = -\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{x^4}^{x^2} f(t)\ dt < 0$.

Soit $x > 0$. Par relation de Chasles :

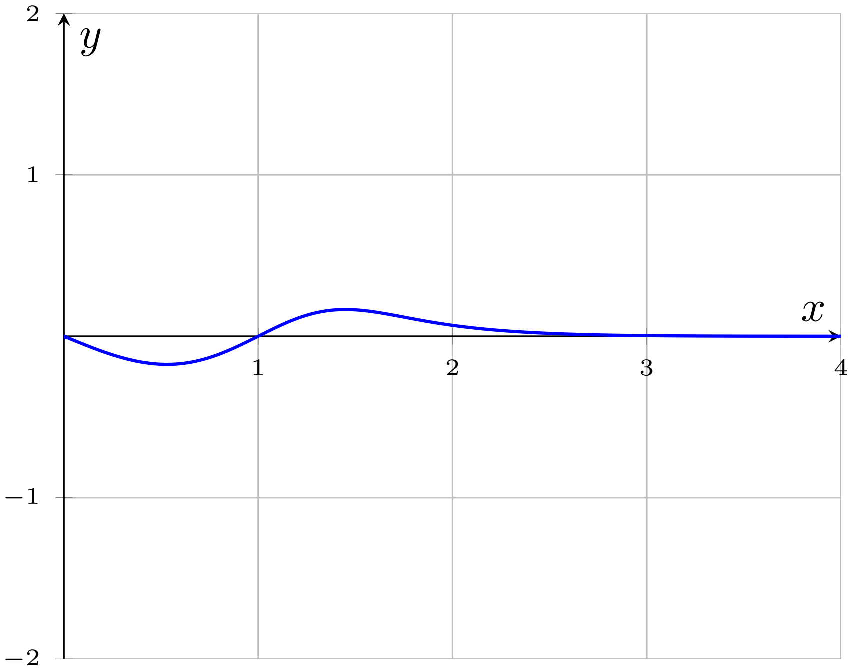
$$g(x) = \frac{1}{x}\left(\int_{x^2}^{0} f(t)\ dt + \int_{0}^{x^4} f(t)\ dt\right) = \frac{1}{x}\left(\int_{0}^{x^4} f(t)\ dt - \int_{0}^{x^2} f(t)\ dt\right)$$

Or, f étant une densité de probabilité nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il suit que :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{x^2} f(t)\ dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x^4} f(t)\ dt = \int_0^{+\infty} f(t)\ dt = 1$$

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que : } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0.}$$

(ii) Traçons l'allure de la courbe représentative de g dans le cas où f est une densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{2}$.



6. a) D'après le théorème fondamental de l'analyse : $F' = f$ et $F(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en 0 : } F(x) = f'(0)x + \underset{x\to0}{o}(x).}$$

b) Par substitution :

$$F(x^4) = f'(0)x^4 + \underset{x\to0}{o}(x^4) \underset{x\to0}{\sim} f'(0)x^4 \qquad \text{et} \qquad F(x^2) = f'(0)x^2 + \underset{x\to0}{o}(x^2) \underset{x\to0}{\sim} f'(0)x^2$$

Il suit que :

$$F(x^4) = \underset{x\to0}{o}(F(x^2))$$

D'où :

$$g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\left(-F(x^2)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -f'(0)x$$

et donc :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -f'(0)$$

$$\boxed{\text{Ceci prouve que } g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et que } g'(0) = -f'(0).}$$