Planche HEC : Systèmes différentiels linéaires

Exercice avec préparation 1

1. **Cours :** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$.

2. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui est représenté par la matrice A dans la base canonique.

a) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$. Trouver les bases des sous-espaces propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

b) On pose $\mathcal{B}' = (a_1, a_2, a_3)$ où $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 0, 1)$ et $a_3 = (1, -1, 0)$. Justifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice M représentative de φ dans la base $\mathcal{B}'$.

c) Déterminer une matrice P telle que $A = PMP^{-1}$. On admet que $P^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. On introduit le système différentiel $X' = AX$.

a) Résoudre $h' = 3h$ avec $h(0) = 1$.

b) On pose $Y = P^{-1}X$. Quel système différentiel est vérifié par Y ?

c) Trouver une solution particulière de l'équation différentielle $h' = 3h + c\mathrm{e}^{3t}$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

d) Déterminer toutes les solutions de $X' = AX$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, homogène, d'ordre 1, à coefficients constants. L'ensemble des solutions est :

$$S = \{t \mapsto C\mathrm{e}^{at} \mid C \in \mathbb{R}\}$$

2. ***a)*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) && L_1 \leftrightarrow L_2 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & (\lambda-1)(3-\lambda) & \lambda-1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix}\right) && L_2 \leftarrow L_2 - (2-\lambda)L_1
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ est une valeur propre de } A &\iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 \\
&\iff (\lambda-1)(3-\lambda) = 0 \texttt{ OU } 3-\lambda = 0 \\
&\iff \lambda = 1 \texttt{ OU } \lambda = 3
\end{aligned}$$

On a bien : $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 3\}$. De plus, après calculs on trouve :
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

Supposons que A soit diagonalisable. Alors il existe une base (U_1, U_2, U_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. D'après le principe des tiroirs, deux de ces vecteurs appartiennent au même sous-espace propre (puisque A ne possède que deux valeurs propres distinctes). On a donc trouvé une famille libre de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 1. C'est absurde.

La matrice A n'est pas diagonalisable.

b) Tout d'abord :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(\mathcal{B}') &= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) && L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&= \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) && L_3 \leftrightarrow L_2 \\
&= 3 && \textit{(car la matrice est échelonnée)}
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{rg}(\mathcal{B}') = 3 = \mathrm{Card}(\mathcal{B}')$ et donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. De plus, $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B}' \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

D'après les calculs précédents :

$$\varphi(a_1) = 3a_1 = 3a_1 + 0a_2 + 0a_3$$
$$\varphi(a_3) = a_3 = 0a_1 + 0a_2 + 1a_3$$

Notons $\mathcal{B}$ la base canonique.

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(a_2)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a_1 + 3a_2)$$

D'où : $\varphi(a_2) = a_1 + 3a_2 = 1a_1 + 3a_2 + 0a_3$.

$$\boxed{\text{Ainsi : } M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

c) Il s'agit de la formule de changement de base.

$$\boxed{\text{On pose alors : } P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

3. a) Il s'agit d'un problème de Cauchy. Les solutions de $h' = 3h$ sont de la forme :

$$t \mapsto C\mathrm{e}^{3t} \qquad \text{où } C \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{La solution de ce problème de Cauchy est : } t \mapsto \mathrm{e}^{3t} \ (C = 1).}$$

b) On a :

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff (PY)' = PMP^{-1}(PY) \\ &\iff PY' = PMY \\ &\iff Y' = MY \end{aligned}$$

c) On cherche une solution particulière de la forme :

$$f : t \mapsto at\mathrm{e}^{3t} \qquad \text{où } a \in \mathbb{R}$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(t) = 3f(t) + c\mathrm{e}^{3t} &\iff a\mathrm{e}^{3t} + 3at\mathrm{e}^{3t} = 3at\mathrm{e}^{3t} + c\mathrm{e}^{3t} \\ &\iff a = c \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, la fonction } t \mapsto ct\mathrm{e}^{3t} \text{ est une solution particulière} \\ \text{de l'équation différentielle } h' = 3h + c\mathrm{e}^{3t}.\end{array}}$$

d) Notons $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Commençons par résoudre le système différentiel linéaire $Y' = MY$. On a :

$$Y' = MY \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} \alpha' & = & 3\alpha & + & \beta & & \\ \beta' & = & & & 3\beta & & \\ \gamma' & = & & & & & \gamma \end{array} \right.$$

- Les solutions de $\gamma' = \gamma$ sont de la forme :

$$t \mapsto C_3 \mathrm{e}^{t} \qquad \text{où } C_3 \in \mathbb{R}$$

- Les solutions de $\beta' = 3\beta$ sont de la forme :

$$t \mapsto C_2 \mathrm{e}^{3t} \qquad \text{où } C_2 \in \mathbb{R}$$

- Les solutions de $\alpha' = 3\alpha + C_2\mathrm{e}^{3t}$ sont de la forme :

$$t \mapsto C_1 \mathrm{e}^{3t} + C_2 t \mathrm{e}^{3t} \qquad \text{où } C_1 \in \mathbb{R}$$

Ainsi, il existe $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2 t\mathrm{e}^{3t} \\ C_2\mathrm{e}^{3t} \\ C_3\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

et

$$X(t) = PY(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2 t\mathrm{e}^{3t} \\ C_2\mathrm{e}^{3t} \\ C_3\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2 t\mathrm{e}^{3t} + C_3\mathrm{e}^{t} \\ C_1\mathrm{e}^{3t} + C_2 t\mathrm{e}^{3t} - C_3\mathrm{e}^{t} \\ C_2\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}$$