Colles de Mathématiques en E2A
Systèmes différentiels linéaires
Semaine 15 : 5-9 janvier

Toutes les définitions et tous les énoncés de théorèmes/propositions du cours sont exigibles des élèves. Les démonstrations des théorèmes du cours ne sont pas exigibles, sauf si elles apparaissent en question de cours.

On pourra à tout moment demander à un·e élève de donner la nature (réel, suite, fonction, ensemble, proposition, etc) d'une expression manipulée dans un exercice, pour vérifier sa bonne compréhension. On pourra aussi demander de préciser quelles sont les variables libres et quelles sont les variables liées (muettes).

On portera une attention toute particulière à ce que les objets soient correctement introduits avant d'être utilisés, et ne soient pas introduits pour rien.

1 Chapitre XIII : Systèmes différentiels linéaires

1.1 Définitions

- Equation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 et d'ordre 2.
- Notion d'équation homogène et d'équation avec second membre.
- Problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2.
- Système différentiel linéaire à coefficients constants. Point de vue matriciel.
- Notion de point d'équilibre (ou d'état d'équilibre ou de solution stationnaire).
- Trajectoire d'un système différentiel. Notion de trajectoire convergente / divergente.

1.2 Résultats

- Principe de superposition.
- Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène ou avec second membre d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.
- Existence et unicité d'une solution à un problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire homogène ou avec second membre d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.
- Ensemble des solutions du système différentiel linéaire $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.
- Existence et unicité d'une solution au problème de Cauchy pour un système différentiel linéaire de la forme $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable.
- Lien entre système différentiel linéaire et équation différentielle linéaire d'ordre 2. Traduction du problème de Cauchy dans ce cas.

1.3 Méthodes

- Résolution des équations différentielles d'ordre 1 et d'ordre 2. Recherche d'une solution particulière lorsqu'il y a un second membre. (La recherche d'une solution particulière doit être accompagnée)
- Pour montrer que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$ est divergente, il suffit de trouver une coordonnée x_i qui vérifie $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = +\infty$ ou $\lim_{t\to+\infty} x_i(t) = -\infty$.

- Résolution des systèmes différentiels linéaires diagonaux par résolutions indépendantes de toutes les équations différentielles homogènes d'ordre 1. Différenciation des constantes pour chacune des équations différentielles.
- Résolution des systèmes différentiels linéaires triangulaires supérieurs (ou inférieurs) par remontées successives. Gestion des constantes C_3, C_2 et C_1 en cascade (pour un système 3×3).
- Pour déterminer les solutions du système différentiel $X' = AX$ dans le cas où A est diagonalisable, il faut déterminer le spectre de A puis une base de chacun de ses sous-espaces propres. C'est le même travail à faire que pour diagonaliser A. On peut ensuite utiliser la formule du cours.
- Résoudre un problème de Cauchy revient en pratique à déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base. On est ainsi ramené à résoudre un système linéaire avec second membre.
- Pour résoudre le système différentiel $X' = AX$, on sera souvent amené à faire un changement de variable en posant $Y = P^{-1}X$ où P est une matrice inversible. En posant $T = P^{-1}AP$, il faut savoir démontrer :
$$X' = AX \iff Y' = TY$$
Il faut ensuite savoir résoudre le système différentiel $Y' = TY$ pour en déduire les solutions de $X' = AX$ en se souvenant que $X = PY$. Le calcul de P^{-1} est inutile et il ne faut donc pas le faire si il n'est pas demandé.

2 Questions de cours

1. Résoudre $y' + 4y = t\mathrm{e}^{-4t}$.
2. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = 0$.
3. Résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$