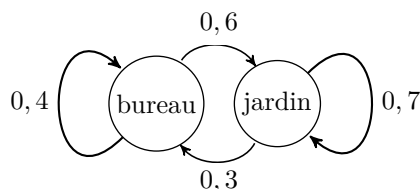


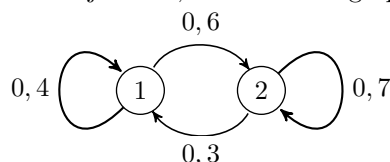
1 Deux exemples introductifs

Nous allons étudier dans ce chapitre des systèmes aléatoires qui peuvent se trouver dans r états possibles (où r est un entier supérieur ou égal à 2) et évoluant en temps discret : à chaque instant, le système est dans un seul état, et il a une certaine probabilité de passer de cet état à un autre.

Exemple 1. On considère une personne qui aime travailler à son bureau et dans son jardin. On suppose qu'elle travaille à son bureau la première heure de la journée. Si cette personne travaille à son bureau, la probabilité qu'elle aille travailler dans son jardin l'heure suivante est égale à 0,6. Si au contraire elle travaille dans son jardin, la probabilité qu'elle aille travailler à son bureau l'heure suivante est égale à 0,3. Représentons cette expérience aléatoire par un *graphe probabiliste* (i.e. un graphe orienté et pondéré tel que la somme des poids des arcs partant d'un sommet est toujours égale à 1) :



En numérotant 1 l'état « bureau » et 2 l'état « jardin », on obtient le graphe probabiliste suivant :



On interprète ce graphe probabiliste comme suit : à chaque instant

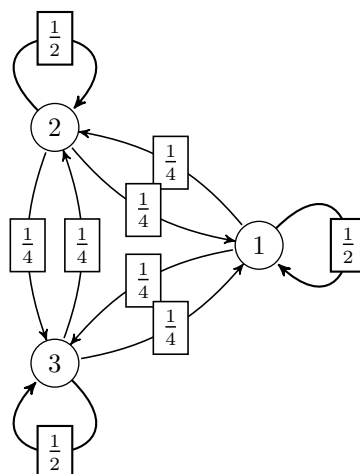
- si on est sur le sommet 1, on a une probabilité égale à
 - 0,6 de se déplacer sur le sommet 2
 - 0,4 de rester sur le sommet 1
- si on est sur le sommet 2, on a une probabilité égale à
 - 0,3 de se déplacer sur le sommet 1
 - 0,7 de rester sur le sommet 2

Exemple 2. On considère trois points distincts du plan A , B et C . Etudions le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points selon le protocole suivant.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n : il ne dépend donc pas des positions occupées aux autres étapes précédentes.
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Représentons le graphe probabiliste associé à cette expérience aléatoire, en numérotant 1 le sommet A , 2 le sommet B et 3 le sommet C :



2 Chaînes de Markov

2.1 Définitions

Définition 1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans un même ensemble E . On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une *chaîne de Markov* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(i, j) \in E^2$ et pour tout $(i_0, \dots, i_{n-1}) \in E^n$, on a

$$\mathbb{P}[X_n=i] \cap [X_{n-1}=i_{n-1}] \cap \dots \cap [X_0=i_0] ([X_{n+1}=j]) = \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j])$$

dès lors que tous les termes ont un sens (i.e. dès que $\mathbb{P}([X_n=i] \cap [X_{n-1}=i_{n-1}] \cap \dots \cap [X_0=i_0]) \neq 0$).

Remarque 1. Cette formule peut faire un peu peur, mais elle se reformule très simplement. Il s'agit de dire que le futur (i.e. X_{n+1}) ne dépend que du présent (i.e. X_n) et pas du passé (i.e. $X_{n-1}, \dots, X_0$).

Exemple 3. Reprenons l'exemple de notre professeur jardinier qui alterne entre le travail à son bureau et le travail dans son jardin. Notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au numéro de l'endroit où la personne travaille pendant l'heure n . On a :

- $X_1 = 1$ (c'est la condition initiale, on nous dit que la personne travaille à son bureau la première heure de la journée)
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de travailler au bureau pendant l'heure $n+1$ sachant qu'on y travaille l'heure n est :

$$\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1}=1]) = 0,4$$

L'énoncé est assez transparent sur le fait que cela ne dépend pas de ce qui s'est passé avant l'heure actuelle. Par exemple :

$$\mathbb{P}_{[X_n=1] \cap [X_{n-1}=2]}([X_{n+1}=1]) = 0,4 \quad (\text{savoir que la personne a travaillé dans le jardin à l'heure } n-1 \text{ ne change rien})$$

et, si $n \geq 3$,

$$\mathbb{P}_{[X_n=1] \cap [X_2=1]}([X_{n+1}=1]) = 0,4 \quad (\text{savoir que la personne a travaillé dans le bureau la 2e heure ne change rien})$$

Définition 2. Soit (X_n) une chaîne de Markov. L'ensemble E des valeurs prises par les variables aléatoires X_n est appelé ensemble des *états* de la chaîne.

Remarque 2. En général, si il y a r états, on choisit $E = \llbracket 1, r \rrbracket$ (ce qui revient à numérotter les états) ou $E = \llbracket 0, r-1 \rrbracket$ (car **Python** commence la numérotation à 0).

Définition 3. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov. Soit $n \in \mathbb{N}$ un instant et soient $i, j \in E$ deux états.

- On dit que la chaîne est *dans l'état i au temps n* si l'événement $[X_n = i]$ est réalisé.
- Les probabilités $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j])$, souvent notées $p_{i,j}(n)$, sont appelées *probabilités de transition* ou *probabilités transitionnelles*.
- La chaîne de Markov est dite *homogène* si les probabilités $p_{i,j}(n)$ ne dépendent pas de n mais seulement de i et de j . Si c'est le cas, on les note $p_{i,j}$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$p_{i,j} = \mathbb{P}_{[X_0=i]}([X_1=j]) = \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j])$$

On pensera à $p_{i,j}$ comme à la « probabilité de passer de l'état i à l'état j ».

Remarque 3. Une chaîne de Markov homogène, c'est une chaîne de Markov dont la loi d'évolution ne change pas avec le temps. Les deux exemples donnés dans l'introduction sont des chaînes de Markov homogènes. Nous ne rencontrerons que ce type de chaînes de Markov dans les sujets de concours a priori.

Proposition 1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène. Soit $(i_0, \dots, i_n) \in E^{n+1}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n [X_k = i_k]\right) &= \mathbb{P}([X_0 = i_0]) \mathbb{P}_{[X_0=i_0]}([X_1 = i_1]) \dots \mathbb{P}_{[X_{n-1}=i_{n-1}]}([X_n = i_n]) \\ &= \mathbb{P}([X_0 = i_0]) \prod_{k=1}^n \mathbb{P}_{[X_{k-1}=i_{k-1}]}([X_k = i_k]) \\ &= \mathbb{P}([X_0 = i_0]) \prod_{k=1}^n p_{i_{k-1}, i_k} \end{aligned}$$

Remarque 4. Il s'agit d'une conséquence de la formule des probabilités composées et de la définition d'une chaîne de Markov. On pourra retenir cette formule avec une phrase : la probabilité d'être, pour tout entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, dans l'état i_k à l'instant k , c'est la probabilité d'être dans l'état i_0 à l'instant 0 fois la probabilité de passer de l'état i_0 à l'instant i_1 fois la probabilité de passer de l'état i_1 à l'instant i_2 fois ... fois la probabilité de passer de l'état i_{n-1} à l'instant i_n .

Definition 4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \dots, r$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle n^{e} état probabiliste de la chaîne de Markov la matrice ligne :

$$V_n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2]) \quad \dots \quad \mathbb{P}([X_n = r])) \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$$

En particulier, V_0 est appelé l'état initial.

Remarque 5. Le n^{e} état probabiliste caractérise la loi de X_n . Il s'agit d'une représentation de cette loi sous la forme d'un vecteur ligne.

Exemple 4. Reprenons l'exemple de notre professeur jardinier qui alterne entre le travail à son bureau et le travail dans son jardin. Puisqu'il commence à travailler dans son bureau, on a $X_1 = 1$ et donc :

$$V_1 = (\mathbb{P}([X_1 = 1]) \quad \mathbb{P}([X_1 = 2])) = (1 \quad 0)$$

Exemple 5. Reprenons l'exemple de notre pion qui se déplace sur les sommets d'un triangle. Notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet où se trouve le pion après le n^{e} déplacement. Puisque le pion est initialement sur le sommet A (qui est numéroté 1), on a $X_0 = 1$ et donc :

$$V_0 = (\mathbb{P}([X_0 = 1]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 3])) = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Definition 5. Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \dots, r$. On note $p_{i,j}$ les probabilités de transition. On appelle matrice de transition de la chaîne de Markov la matrice :

$$M = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \dots & p_{1,r} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \dots & p_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r,1} & p_{r,2} & \dots & p_{r,r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$$

Exemple 6. Reprenons l'exemple de notre professeur jardinier qui alterne entre le travail à son bureau et le travail dans son jardin. La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Exemple 7. Reprenons l'exemple de notre pion qui se déplace sur les sommets d'un triangle. La matrice de transition est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 2. Soit M une matrice de transition d'une chaîne de Markov. Alors :

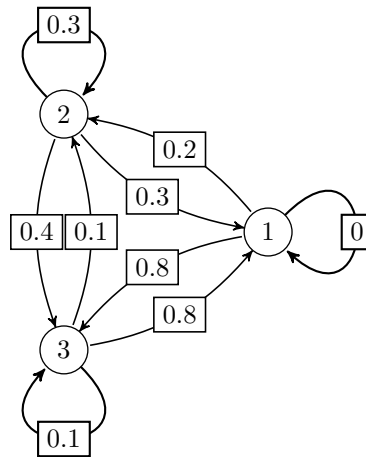
- Les coefficients de la matrice M sont tous positifs ou nuls.
- La somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1.

Une telle matrice définit toujours un graphe probabiliste. Pour la culture : une telle matrice est dite stochastique.

Definition 6. Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \dots, r$. On note $M = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$ sa matrice de transition. On appelle graphe probabiliste associé à M le graphe probabiliste à r sommets tel que

- les sommets sont numérotés de 1 à r
- le poids de l'arc orienté qui permet de passer du sommet i au sommet j est $p_{i,j}$

Exemple 8. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,8 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ une matrice de transition d'une chaîne de Markov. Traçons le graphe probabiliste associé à cette matrice de transition.



On vérifie que la somme des poids des arcs partant d'un même sommet est égale à 1, ce qui correspond au fait que la somme des coefficients de chaque ligne de M est égale à 1.

2.2 Méthode : calcul du n^e état probabiliste

2.2.1 Le cas d'une chaîne de Markov à deux états

Reprenons l'exemple de notre professeur jardinier qui alterne entre le travail à son bureau et le travail dans son jardin. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}([X_n = 1])$. Remarquons qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_n = 2]) = \mathbb{P}(\overline{[X_n = 1]}) = 1 - u_n$. Rappelons que la matrice de transition de cette chaîne de Markov est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Rappelons également que l'état probabiliste initial est :

$$V_1 = (\mathbb{P}([X_1 = 1]) \quad \mathbb{P}([X_1 = 2])) = (1 \quad 0)$$

et donc $u_1 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = 1], [X_n = 2])$:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) \\
 &= \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [X_n = 1]) + \mathbb{P}([X_{n+1} = 1] \cap [X_n = 2]) \\
 &= \mathbb{P}([X_n = 1])\mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) + \mathbb{P}([X_n = 2])\mathbb{P}_{[X_n=2]}([X_{n+1} = 1]) \\
 &= p_{1,1}\mathbb{P}([X_n = 1]) + p_{2,1}\mathbb{P}([X_n = 2]) \\
 &= \frac{4}{10}\mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{3}{10}\mathbb{P}([X_n = 2]) && (d'après la matrice de transition) \\
 &= \frac{4}{10}u_n + \frac{3}{10}(1 - u_n) && (par définition de u_n) \\
 &= \frac{1}{10}u_n + \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. En appliquant la méthode d'étude d'une telle suite, on obtient la formule suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 10^{n-1}}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_n = (\mathbb{P}([X_n = 1]) \quad \mathbb{P}([X_n = 2])) = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 10^{n-1}} \quad \frac{2}{3} - \frac{2}{3 \times 10^{n-1}} \right)$$

On a ainsi déterminé, quelque soit l'instant $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n .

2.2.2 Le cas d'une chaîne de Markov à trois états

Reprenons l'exemple de notre pion qui se déplace sur les sommets d'un triangle. Rappelons que la matrice de transition de cette chaîne de Markov est :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Rappelons également que l'état probabiliste initial est :

$$V_0 = (\mathbb{P}([X_0 = 1]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 2]) \quad \mathbb{P}([X_0 = 3])) = (1 \quad 0 \quad 0)$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = j]) &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}([X_n = i] \cap [X_{n+1} = j]) \\ &= \sum_{i=1}^3 \mathbb{P}([X_n = i]) \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) \\ &= \sum_{i=1}^3 p_{i,j} \mathbb{P}([X_n = i]) \end{aligned}$$

Spécifions la valeur de j pour y voir clair :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) &= \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{4} \mathbb{P}([X_n = 2]) + \frac{1}{4} \mathbb{P}([X_n = 3]) \\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) &= \frac{1}{4} \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = 2]) + \frac{1}{4} \mathbb{P}([X_n = 3]) \\ \mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) &= \frac{1}{4} \mathbb{P}([X_n = 1]) + \frac{1}{4} \mathbb{P}([X_n = 2]) + \frac{1}{2} \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{aligned}$$

Ces trois formules (une pour chaque valeur de j) s'interprètent et se rassemblent en un seul produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) & \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) & \mathbb{P}([X_{n+1} = 3]) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_n = 1]) & \mathbb{P}([X_n = 2]) & \mathbb{P}([X_n = 3]) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Autrement dit :

$$V_{n+1} = V_n M$$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$

où $\mathcal{P}(n)$: « $V_n = V_0 M^n$ ».

Initialisation : $V_0 M^0 = V_0 I_3 = V_0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= V_n M \\ &= V_0 M^n M \quad \left. \vphantom{V_{n+1}} \right\} \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= V_0 M^{n+1} \end{aligned}$$

Remarque 6. On retiendra que si V_0 (l'état probabiliste initial) et M (la matrice de transition) sont connus, alors l'état probabiliste V_n est entièrement déterminé à tout instant n subséquent. L'ingrédient principal pour mener les calculs est la formule des probabilités totales.

Remarque 7. On peut généraliser la méthode précédente pour des chaînes de Markov à r états avec $r \geq 3$. La démarche est identique.

Pour terminer le calcul de V_n , il faut calculer $V_0 M^n$. Pour cela, nous allons utiliser la théorie de la réduction des matrices.

La matrice M est diagonalisable et on a :

$$M = P D P^{-1}$$

où

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} V_n &= V_0 M^n \\ &= V_0 P D^n P^{-1} \\ &= (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} D^n P^{-1} \\ &= (1 \ 0 \ 1) D^n P^{-1} \\ &= \frac{1}{4^n} (1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \frac{1}{4^n} (1 \ 0 \ 4^n) P^{-1} \\ &= \frac{1}{4^n} (1 \ 0 \ 4^n) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3 \times 4^n} (2 + 4^n \quad -1 + 4^n \quad -1 + 4^n) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2 + 4^n}{3 \times 4^n} & \frac{-1 + 4^n}{3 \times 4^n} & \frac{-1 + 4^n}{3 \times 4^n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.2.3 Le cas général

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \dots, r$. On note $M = (p_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq r}}$ sa matrice de transition.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = r])_{i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket}$, on a :

$$\mathbb{P}([X_{n+1} = j]) = \sum_{i=1}^r \mathbb{P}([X_n = i] \cap [X_{n+1} = j])$$

Rappelons que $\mathbb{P}_B(A)$ n'a de sens que lorsque $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Ainsi, pour continuer le calcul avec des probabilités conditionnelles, il faut prendre quelques précautions (cette difficulté avait été occultée dans les deux exemples précédents).

On introduit alors l'ensemble $I_n = \{i \in \llbracket 1, r \rrbracket \mid \mathbb{P}([X_n = i]) \neq 0\}$, ce qui permet de sommer par paquets :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{n+1} = j]) &= \sum_{i \in I_n} \mathbb{P}([X_n = i] \cap [X_{n+1} = j]) + \sum_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket \setminus I_n} \mathbb{P}([X_n = i] \cap [X_{n+1} = j]) \\ &= \sum_{i \in I_n} \mathbb{P}([X_n = i]) \mathbb{P}_{[X_n = i]}([X_{n+1} = j]) \\ &= \sum_{i \in I_n} p_{i,j} \mathbb{P}([X_n = i]) \\ &= \sum_{i \in I_n} p_{i,j} \mathbb{P}([X_n = i]) + \sum_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket \setminus I_n} p_{i,j} \mathbb{P}([X_n = i]) \\ &= \sum_{i=1}^r p_{i,j} \mathbb{P}([X_n = i]) \end{aligned}$$

D'où : $V_{n+1} = V_n M$.

2.3 Etats stables d'une chaîne de Markov homogène

Définition 7. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à r états, de matrice de transition M . Soit $\pi = (\pi_1 \dots \pi_r) \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ une matrice ligne définissant une loi de probabilité (*i.e.* dont les coefficients sont positifs et de somme égale à 1). On dit que π est un *état stable* de la chaîne de Markov si $\pi = \pi M$. Si c'est le cas, on dit aussi que la loi de probabilité associée à π est une *loi stationnaire* de la chaîne de Markov.

Remarque 8. Si il existe un instant n tel que X_n suit la loi de probabilité de π (*i.e.* tel que $V_n = \pi$), alors pour tout instant $k \geq n$, X_k suit également la loi de probabilité de π (en vertu de la formule $V_{n+1} = V_n M$). La loi stationne bien.

Théorème 9. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à r états, de matrice de transition M . Soit $\pi = (\pi_1 \dots \pi_r) \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} \pi \text{ est un état stable de la chaîne de Markov} &\iff \begin{cases} {}^t\pi \text{ est un vecteur propre de } {}^tM \text{ associé à la valeur propre } 1 \\ \pi \text{ définit une loi de probabilité} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} {}^t\pi = {}^tM {}^t\pi \\ \forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket, \pi_j \geq 0 \\ \sum_{j=1}^r \pi_j = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Définition 8. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \dots, r$. On dit que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi si il existe $(\pi_1, \dots, \pi_r) \in \mathbb{R}^r$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \pi_k$$

Remarque 10. L'état k est fixé, c'est le temps n qui tend vers $+\infty$ (on regarde ce qu'il se passe en temps long, ou pour le dire autrement, on regarde le comportement asymptotique en temps).

Théorème 11. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène à r états notés $1, 2, \dots, r$. Si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi, alors la loi limite est nécessairement une loi stationnaire de la chaîne de Markov. Autrement dit, si, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\pi_j = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = j])$ existe et est un réel, alors la matrice ligne $\pi = (\pi_1 \dots \pi_r) \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$ est un état stable de la chaîne de Markov.

Remarque 12. Ce théorème permet, au choix :

- de vérifier qu'un vecteur ligne π (donné dans l'énoncé) est un état stable de la chaîne de Markov
- de découvrir un état stable de la chaîne de Markov en calculant $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}([X_n = j])$ (dans ce cas, le vecteur π n'est pas donné à l'avance)

Exemple 9. Reprenons l'exemple de notre professeur jardinier qui alterne entre le travail à son bureau et le travail dans son jardin. D'après les calculs faits précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = 1]) &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3 \times 10^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3 \times 10^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, dans un futur lointain et sans autre observation que celle de la condition initiale, le professeur jardinier a une chance sur trois de travailler dans son bureau et deux chances sur trois de travailler dans son jardin. La matrice ligne $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable.

Exemple 10. Reprenons l'exemple de notre pion qui se déplace sur les sommets d'un triangle. D'après les calculs faits précédemment :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_n = 1]) &= \frac{2 + 4^n}{3 \times 4^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}([X_n = 2]) &= \frac{-1 + 4^n}{3 \times 4^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \\ \mathbb{P}([X_n = 3]) &= \frac{-1 + 4^n}{3 \times 4^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi, dans un futur lointain et sans autre observation que celle de la condition initiale, le pion peut se trouver sur n'importe quel sommet de manière équiprobable. La matrice ligne $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ est un état stable.