DS4 (version A) - barème

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidat·es sont invité·es à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique*** *est* ***interdite****. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

Exercice 1 (EDHEC 2004)

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à 2.
On note e_0, e_1, e_2 les fonctions définies, pour tout réel x par :

$$e_0(x) = 1, \quad e_1(x) = x \quad \text{et} \quad e_2(x) = x^2$$

et on rappelle que $\mathscr{B} = (e_0, e_1, e_2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à toute fonction polynomiale P de E associe la fonction $Q = f(P)$, où Q est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel x associe $(x^2 - x)P(x)$.

1. a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

- **2 pt** : f est à valeurs dans E
- **2 pt** : f est une application linéaire (**1 pt** pour citer la linéarité de la dérivation)

b) Déterminer $f(e_0)$, $f(e_1)$ et $f(e_2)$ en fonction de e_0, e_1 et e_2.

- **1 pt** : $f(e_0) = 2e_0$
- **1 pt** : $f(e_1) = -2e_0 + 6e_1$
- **1 pt** : $f(e_2) = -6e_1 + 12e_2$

c) En déduire que la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- **2 pt** : $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_0)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$

(seulement 1 pt à la question si justification existente mais imprécise)

d) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

- **1 pt** : A est triangulaire supérieure et tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls donc A est inversible
- **1 pt** : f est inversible si et seulement si A est inversible

2. a) Donner les valeurs propres de A, puis en déduire que A est diagonalisable.

- **1 pt** : A est triangulaire supérieure donc les coefficients diagonaux de A sont les valeurs propres de A
- **1 pt** : $\text{Sp}(A) = \{2, 6, 12\}$
- **1 pt** : La matrice A possède 3 valeurs propres distinctes et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$

b) Déterminer les sous-espaces propres de A.

- **1 pt** : Ecriture du système linéaire associé à l'équation $AX = 2X$
- **1 pt** : Résolution de ce système
- **1 pt** : Conclusion $E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pt** : $E_6(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
- **2 pt** : $E_{12}(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$

c) On compile le script **Python** suivant :

```
A = np.array([[2,-2,0],[0,6,-6],[0,0,12]])
print(al.matrix_rank(A-6*np.eye(3)))
```

Donner la valeur affichée dans la console **Python** et justifier à l'aide de la question précédente.

- **1 pt** : La console **Python** affiche la valeur 2
- **1 pt** : d'après le théorème du rang :

$$3 = \dim(E_6(A)) + \mathrm{rg}(A - 6I)$$

3. a) Justifier l'existence d'une matrice P inversible dont la première ligne ne contient que des « 1 » telle que $A = PDP^{-1}$, où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

- **1 pt** : La matrice A est diagonalisable. Donc il existe une matrice P inversible obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres de A, et une matrice D diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.
- **1 pt** : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$.
- **1 pt** : Initialisation
- **1 pt** : Utilisation hypothèse de récurrence dans l'hérédité
- **1 pt** : Utilisation question 3.a) dans l'hérédité

4. a) Déterminer la matrice P^{-1}.
- **2 pt** : algorithme du pivot de Gauss connu et bien présenté
- **1 pt** : $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

(-1 pt à la question si introduction de fractions avant la fin + erreur de calcul)

b) En déduire explicitement, en fonction de n, la matrice A^n.
- **2 pt** : première multiplication correcte

$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & 5 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \cdot 2^n & 5 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n \\ 0 & -5 \cdot 6^n & -5 \cdot 6^n \\ 0 & 0 & 2 \cdot 12^n \end{pmatrix}$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 6^n & 12^n \\ 0 & -2 \cdot 6^n & -5 \cdot 12^n \\ 0 & 0 & 5 \cdot 12^n \end{pmatrix}$$

- **1 pt** : deuxième multiplication correcte pour obtenir

$$A^n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 \cdot 2^n & 5(2^n - 6^n) & 3 \cdot 2^n - 5 \cdot 6^n + 2 \cdot 12^n \\ 0 & 10 \cdot 6^n & 10(6^n - 12^n) \\ 0 & 0 & 10 \cdot 12^n \end{pmatrix}$$

c) On dit qu'une suite de matrices (M_n) tend vers la matrice M, lorsque n tend vers $+\infty$, si chaque coefficient de M_n tend vers le coefficient situé à la même place dans M.
On pose $B = \dfrac{1}{12}\ A$. Montrer que la suite (B^n) tend vers une matrice J vérifiant $J^2 = J$.

- **2 pt** : $\lim_{n\to+\infty} B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J$
- **1 pt** : Vérification $J^2 = J$

Exercice 2 (ECRICOME 2014)

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \mathrm{e} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de f sur l'intervalle $[0, +\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n existe.

- **1 pt : pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) > 0$**
- **1 pt : initialisation**
- **2 pts : hérédité (existence + positivité)**

2. Écrire un programme en **Python** qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.

```python
import numpy as np
N = int(input('Entrez un nombre entier N : '))
u = np.e
for i in range(N):
    u = u / np.log(1+u)
print(u)
```

- **1 pt : initialisation** `u`
- **1 pt : taille boucle for**
- **1 pt : mise à jour** `u`
- **1 pt : structure programme correcte (pas une fonction)**

3. Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

- **1 pt : continuité sur** $]0, +\infty[$
- **1 pt : continuité en** 0

4. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

- **1 pt : même raisonnement**

5. Donner le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de :

$$\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

puis déterminer un équivalent de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.

- **1 pt :** $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- **1 pt :** $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- **1 pt :** $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$
- **1 pt :** $f'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$

6. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

- **1 pt :** $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$
- **1 pt :** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{2}$**. Ceci prouve que** f **est dérivable en** 0 **et** $f'(0) = \frac{1}{2}$
- **1 pt : D'après la question précédente :** $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0)$**. Donc** f' **est continue en** 0

7. Établir :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1, \quad f(x) \leqslant x \quad \text{ et } \quad (x+1)\,\ln(x+1) \geqslant (x+1)$$

En déduire :

$$\forall x \geqslant \mathrm{e}-1, \ f'(x) \geqslant 0$$

- **1 pt :** $\frac{1}{\ln(1+x)} \leqslant 1$ **donc** $f(x) \leqslant x$
- **1 pt :** $\ln(1+x) \geqslant 1$ **donc** $(x+1)\ln(1+x) \geqslant x+1$
- **1 pt :** $f'(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}}{(\ln(1+x))^2} = \frac{(x+1)\ln(1+x)-x}{(1+x)(\ln(1+x))^2}$
- **1 pt :** $(x+1)\ln(1+x) - x \geqslant 1$ **d'après ce qui précède et** $(1+x)(\ln(1+x))^2 > 0$

8. Démontrer :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{e}-1 \leqslant u_n$$

- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

9. Établir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser la valeur de sa limite L.

- **1 pt : la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est décroissante et minorée par e** -1
- **1 pt : par théorème de convergence monotone, la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers un réel** $L \geqslant$ **e** -1**.**
- **1 pt : thm du point fixe avec la continuité de** f**, ou bien :**
  - $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} L$ **par argument de suite extraite**
  - $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(L)$ **par continuité de** f **en** L **(on a bien** $L \geqslant 0$**.)**
  - **unicité de la limite**
- **1 pt :** $x = f(x) \iff x =$ **e** -1

Exercice 3 (ECRICOME 2025)

1. *a)* Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ est convergente.

- **1 pt : la fonction** $t \mapsto t^n \mathbf{e}^{-t}$ **est continue sur** $[0, +\infty[$ **donc l'intégrale** $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathbf{e}^{-t} \mathbf{d}t$ **est impropre en** $+\infty$**.**
- **1 pt : pour tout** $t \geqslant 1$**,** $t^n \mathbf{e}^{-t} \geqslant 0$ **et** $\dfrac{1}{t^2} \geqslant 0$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^{n+2} \mathbf{e}^{-t} = 0$ **par croissances comparées donc** $t^n \mathbf{e}^{-t} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$
- **1 pt : l'intégrale impropre** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathbf{d}t$ **converge par critère de Riemann**

On note pour tout entier naturel n, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

b) Calculer I_0 et I_1.

- **1 pt :** $I_0 = 1$
- **1 pt : IPP valide car les fonctions** u **et** v **sont de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $[0, B]$
- **1 pt :** $I_1 = 1$

2. Montrer que, pour tout réel x positif, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt$ est convergente.

- **2 pt :** $0 \leqslant \dfrac{\mathbf{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant \mathbf{e}^{-t}$ **(dont 1 pt pour les arguments)**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t} \mathbf{d}t$ **converge (il s'agit de** I_0**)**

On considère la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt} dt.$$

3. Expliciter la valeur de $F(0)$.

- **1 pt :** $F(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t} \mathbf{d}t = I_0 = 1$

4. Soient x et y deux réels positifs tels que $x \leqslant y$.
Montrer que $F(y) \leqslant F(x)$.
Que peut-on en déduire sur la fonction F ?

- **2 pt :** $\dfrac{\mathbf{e}^{-t}}{1+xt} \geqslant \dfrac{\mathbf{e}^{-t}}{1+yt}$ **(dont 1 pt pour les arguments)**
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**
- **1 pt : la fonction** F **est décroissante sur** $[0, +\infty[$

5. *a)* Pour tout réel x positif, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt} dt$.
On distinguera le cas $x = 0$ *et le cas* $x > 0$

- **1 pt : si** $x = 0$**, alors** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt} \mathbf{d}t = \int_0^1 1 \mathbf{d}t = 1$
- **2 pt : si** $x > 0$**, alors** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+xt} \mathbf{d}t = \frac{1}{x} \int_0^1 \frac{x}{1+xt} \mathbf{d}t = \frac{1}{x} \Big[\ln(1+xt) \Big]_0^1 = \frac{\ln(1+x)}{x}$

b) Montrer que, pour tout réel x positif :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \leqslant \int_0^1 \frac{1}{1+xt}dt$$

- **1 pt :** $\dfrac{\mathbf{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant \dfrac{1}{1+xt}$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**

c) Montrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+xt}dt \leqslant \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$$

- **2 pt :** $0 \leqslant \dfrac{\mathbf{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant \dfrac{\mathbf{e}^{-t}}{x}$

d) À l'aide des questions précédentes, déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- **1 pt :** $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{e}^{-t}}{1+xt}\mathbf{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{1+xt}\mathbf{d}t$ **(relation de Chasles)**
- **1 pt :** $0 \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}\mathbf{d}t \leqslant \dfrac{\ln(1+x)}{x} + \dfrac{1}{x}I_0 = \dfrac{\ln(1+x)}{x} + \dfrac{1}{x}$
- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} = 0$ **(croissances comparées)**
- **1 pt : par théorème d'encadrement :** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$

6. Soit x un réel positif. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt$ est convergente.

a) Montrer que :

$$F(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t}(1-xt)dt = x^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-t}}{1+xt}dt.$$

- **1 pt : les intégrales I_0 et I_1 étant convergentes, il suit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}(1-xt)\mathbf{d}t$ est convergente par linéarité de l'intégrale**
- **1 pt :** $F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}(1-xt)\mathbf{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{e}^{-t}}{1+xt}\mathbf{d}t - \int_0^{+\infty} \mathbf{e}^{-t}(1-xt)\mathbf{d}t$
- **1 pt : fin du calcul**

b) En déduire que :

$$0 \leqslant F(x) - I_0 + xI_1 \leqslant x^2 I_2.$$

- **1 pt :** $F(x) - I_0 + xI_1 = x^2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathbf{e}^{-t}}{1+xt}\mathbf{d}t$
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{t^2\mathbf{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant t^2\mathbf{e}^{-t}$
- **1 pt : par croissance de l'intégrale, les bornes étant rangées dans l'ordre croissant**

7. a) En déduire que la fonction F admet le développement limité à l'ordre 1 suivant au voisinage de 0 :

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + o(x).$$

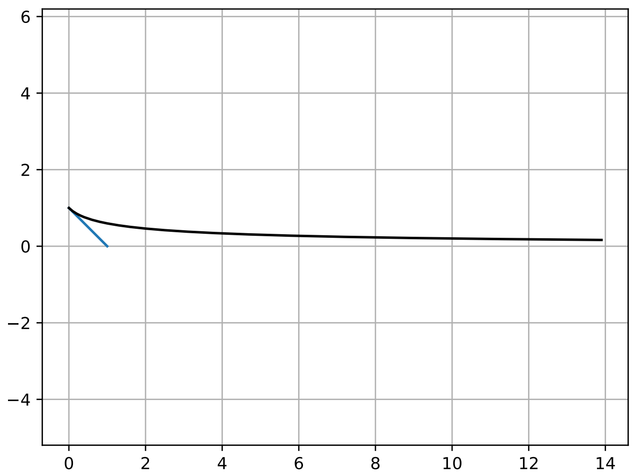
- **1 pt :** $0 \leqslant \dfrac{F(x)-1+x}{x} \leqslant xI_2$
- **1 pt : par théorème d'encadrement,** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-1+x}{x} = 0$

- **1 pt : fin du calcul et unicité du développement limité**

b) Montrer que F est dérivable en 0 et déterminer $F'(0)$.

- **1 pt :** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = -1$
- **1 pt :** $F'(0) = -1$

8. On admet que la fonction F est continue sur $[0,+\infty[$.
En tenant compte des propriétés démontrées dans cet exercice, tracer l'allure de la courbe représentative de F. On fera figurer sa tangente au point d'abscisse 0.



- **1 pt : tangente en** 0
- **1 pt :** $F(0) = 1$
- **1 pt : limite en** $+\infty$
- **1 pt : décroissance**

Exercice 4

Les deux parties sont indépendantes

Partie I (`EML 2010`)

Une gare dispose de deux guichets. Trois clients notés C_1, C_2, C_3 arrivent en même temps. Les clients C_1 et C_2 se font servir tandis que le client C_3 attend puis effectue son opération dès que l'un des deux guichets se libère.
On définit X_1, X_2, X_3 les variables aléatoires égales à la durée d'opération des clients C_1, C_2, C_3 respectivement. Ces durées sont mesurées en minutes et arrondies à l'unité supérieure ou égale. On suppose que les variables X_1, X_2, X_3 suivent la loi géométrique de paramètre p, $p \in \,]0,1[$ et qu'elles sont indépendantes. On note $q = 1-p$.
On note A l'événement : « C_3 termine en dernier son opération ».
Ainsi l'événement A est égal à l'événement : $[\min(X_1,X_2) + X_3 > \max(X_1,X_2)]$.
On se propose de calculer la probabilité de A.

1. Rappeler la loi de X_1 ainsi que son espérance $\mathbb{E}(X_1)$ et sa variance $\mathbb{V}(X_1)$.

- **1 pt : D'après l'énoncé,** $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$**. Autrement dit :**

- × $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
- × $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}([X_1 = k]) = p\ q^{k-1}$.

- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_1) = \dfrac{1}{p}$ **et** $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{q}{p^2}$

On définit la variable aléatoire $\Delta = |X_1 - X_2|$.

2. Calculer la probabilité $\mathbb{P}([\Delta = 0])$.

- **1 pt :** $[\Delta = 0] \ = \ [|X_1 - X_2| = 0] \ = \ [X_1 - X_2 = 0]$
- **1 pt : La famille** $([X_2 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt : d'après la formule des probabilités totales,**

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = 0])$$

- **1 pt : par indépendance,**

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = 0]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\ \mathbb{P}([X_1 = k])$$

- **1 pt : en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison** $q^2 \in\ ]-1,1[$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([\Delta = 0]) = \dfrac{p}{1+q}$

3. Soit n un entier naturel non nul.

a) Justifier : $\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k])\, \mathbb{P}([X_1 = n+k])$.

- **1 pt : La famille** $([X_2 = k])_{k\in\mathbb{N}^*}$ **est un système complet d'événements**
- **1 pt : d'après la formule des probabilités totales,**

$$\mathbb{P}([X_1 - X_2 = n]) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X_2 = k] \cap [X_1 - X_2 = n])$$

- **1 pt : par indépendance de** X_1 **et** X_2

b) En déduire : $\mathbb{P}([\Delta = n]) = \dfrac{2pq^n}{1+q}$.

- **1 pt :** $[\Delta = n] \ = \ [\ |X_1 - X_2| = n] \ = \ [X_1 - X_2 = n] \ \cup \ [X_1 - X_2 = -n]$
- **1 pt :** $n \neq 0$**, donc les événements** $[X_1 - X_2 = n]$ **et** $[X_1 - X_2 = -n]$ **sont incompatibles**
- **2 pts :** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}\big(\, [X_1 - X_2 = n]\,\big) = \dfrac{p\,q^n}{1+q}$
- **1 pt : de même,** $\mathbb{P}([X_2 - X_1 = n]) = \dfrac{p\,q^n}{1+q}$

4. *a)* Montrer que Δ admet une espérance $\mathbb{E}(\Delta)$ et la calculer.

- **1 pt : Les v.a.r.** X_1 **et** X_2 **étant à valeurs entières,** $\Delta(\Omega) \subset \mathbb{N}$
- **1 pt : La v.a.r.** Δ **admet une espérance si et seulement si la série** $\sum\ n\ \mathbb{P}\big(\,[\Delta = n]\,\big)$ **est absolument convergente. Cette série étant à termes positifs, cela revient à démontrer qu'elle est convergente.**
- **1 pt :** $\sum\limits_{k=0}^{N}\ k\, \mathbb{P}\big(\,[\Delta = k]\,\big) = 2\ \dfrac{p\,q}{1+q}\ \sum\limits_{k=1}^{N}\ k\, q^{k-1}$

- **1 pt : en reconnaissant la somme partielle d'ordre N d'une série géométrique dérivée première de raison $q \in]-1,1[$**
- **1 pt :** $\mathbb{E}(\Delta) = \dfrac{2\,q}{(1+q)(1-q)} = \dfrac{2\,q}{p(1+q)}$

b) Montrer : $\mathbb{E}((X_1 - X_2)^2) = 2\,\mathbb{V}(X_1)$. En déduire que Δ admet une variance $\mathbb{V}(\Delta)$ et la calculer.

- **1 pt :** $(X_1 - X_2)^2 \; = \; {X_1}^2 - 2\,X_1 X_2 + {X_2}^2$
- **1 pt : La v.a.r. $(X_1 - X_2)^2$ admet une espérance car elle est la combinaison linéaire de v.a.r. qui en admettent une**
- **1 pt : linéarité de l'espérance**
- **1 pt : les v.a.r. X_1 et X_2 sont indépendantes**
- **1 pt : les v.a.r. X_1 et X_2 ont même loi donc $\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2)$ et $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{E}(X_2^2)$**
- **1 pt : par la formule de Kœnig-Huygens**
- **1 pt :** $\Delta^2 = |X_2 - X_1|^2 = (X_2 - X_1)^2$
- **2 pts :** $\mathbb{V}(\Delta) \; = \; 2\,\dfrac{q\,(1+q^2)}{p^2\,(1+q)^2}$

5. Montrer que l'événement A est égal à l'événement $[X_3 > \Delta]$.

- **1 pt :** $A \; = \; [\min(X_1, X_2) + X_3 > \max(X_1, X_2)] \; = \; [X_3 > \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)]$
- **1 pt :** $\Delta = \max(X_1, X_2) - \min(X_1, X_2)$
- **1 pt : utilisation d'une issue**

6. ***a)*** En déduire : $\mathbb{P}(A) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k])\,\mathbb{P}([X_3 > k])$.

- **1 pt : La famille $([\Delta = k])_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements**
- **1 pt : par la formule des probabilités totales,**

$$\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k] \;\cap\; [X_3 > \Delta])$$

- **1 pt : Δ et X_3 sont indépendantes par le lemme des coalitions**

b) Exprimer $\mathbb{P}(A)$ à l'aide de p et q.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X_3 > \Delta]) = \mathbb{P}([\Delta = 0]) \;\times\; \mathbb{P}([X_3 > 0]) + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([\Delta = k]) \;\times\; \mathbb{P}([X_3 > k])$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([\Delta = 0]) \;\times\; \mathbb{P}([X_3 > 0]) = \dfrac{p}{1+q}$ **(d'après la question *2.*)**
- **1 pt : pour tout $k \in \mathbb{N}$:** $\mathbb{P}([X_3 > k]) = q^k$
- **1 pt : en reconnaissant la somme d'une série géométrique de raison $q^2 \in]-1,1[$**
- **2 pts :** $\mathbb{P}\big(A\big) = \dfrac{1+q^2}{(1+q)^2}$

Partie II (EDHEC 1999)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On suppose que X, Y et Z suivent toutes la loi $\mathcal{U}(⟦1, n⟧)$.

7. ***a)*** Montrer que, pour tout $k \in ⟦2, n+1⟧$, $\mathbb{P}([X + Y = k]) = \dfrac{k-1}{n^2}$.

- **1 pt : formule des probabilités totales avec le système complet d'événements** $([X = i])_{i\in[\![1,n]\!]}$
- **1 pt :** $\begin{cases} 1 \leqslant k-i \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \iff 1 \leqslant i \leqslant k-1$ **bien justifié**
- **1 pt : indépendance citée**
- **1 pt : fin du calcul**

b) Montrer que, pour tout $k \in [\![n+2, 2n]\!]$, $\mathbb{P}([X+Y=k]) = \dfrac{2n-k+1}{n^2}$.

- **2 pt :** $\begin{cases} 1 \leqslant k-i \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases} \iff k-n \leqslant i \leqslant n$ **bien justifié**
- **1 pt : fin du calcul**

8. En déduire que :

$$\mathbb{P}([X+Y=Z]) = \frac{n-1}{2n^2}$$

- **1 pt : formule des probabilités totales avec le système complet d'événements** $([Z = k])_{k\in[\![1,n]\!]}$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X+Y=Z]) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{k-1}{n^2}$ **bien justifié**
- **1 pt :** Z **et** $X+Y$ **sont indépendantes d'après le lemme des coalitions**
- **1 pt : fin du calcul**

9. a) Montrer que la variable aléatoire $T = n+1-Z$ suit la loi $\mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

- **1 pt :** $T(\Omega) = [\![1,n]\!]$
- **1 pt :** $\mathbb{P}([T=k]) = \dfrac{1}{n}$ **car** $n+1-k \in [\![1,n]\!]$

b) Justifier que T est indépendante de X et de Y.

Démonstration.
Question mal posée, on fait directement la question suivante. □

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}([X+Y+Z=n+1])$.

- **1 pt :** $\mathbb{P}([X+Y+Z=n+1]) = \mathbb{P}([X+Y=n+1-Z]) = \mathbb{P}([X+Y=T])$
- **1 pt : d'après le lemme des coalitions, les variables aléatoires** T **et** $X+Y$ **sont indépendantes**
- **1 pt :** $\mathbb{P}([X+Y+Z=n+1]) = \dfrac{n-1}{2n^2}$ **en faisant le même calcul qu'en question *2***