DS5 barème (version A)

Problème 1 (`sujet maison`)

Partie I : Etude d'une matrice A

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) On exécute le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

- **1 pt :** $A^3 = A$

b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

- **1 pt :** $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ **est un polynôme annulateur de** A
- **1 pt :** $\mathrm{Sp}(A) \subset \{$**racines de** $P(X)\}$
- **1 pt : les valeurs propres possibles de** A **sont** -1, 0 **et** 1

2. a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

- **2 pts :** $E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ **donc** -1 **est valeur propre de** A
- **1 pt :** $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$ **est une base de** $E_{-1}(A)$
- **1 pt :** $E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$
- **1 pt :** $E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

- **1 pt : La matrice** A **est carrée d'ordre** 3 **et admet trois valeurs propres distinctes donc** A **est diagonalisable**

- **1 pt :** $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ **et** $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : Par la formule de changement de base, on a bien** $A = PDP^{-1}$
  ou P **est obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres**

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on le note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

3. *Deux résultats théoriques.* On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

- **2 pts : calcul correct**

b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} (M_n + M'_n) = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} (M_n M'_n) = MM'$$

- **1 pt : calcul correct pour la somme**
- **2 pts : calcul correct pour le produit**

Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

4. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors e^D existe et vaut $\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

- **1 pt :** $D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$

- **1 pt :** $S_n(D) = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}c^k \end{pmatrix}$
- **1 pt : reconnaissance des sommes partielles de séries exponentielles**

5. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire la matrice M^k pour tout entier naturel k.

- **1 pt :** $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt :** $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- **1 pt : synthèse, en n'oubliant pas les cas $k = 0$ et $k = 1$**

b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

- **2 pts :** $S_n(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **1 pt : e^M existe et e^M** $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 en fonction de M.

- **1 pt :** $M^2 = 3M$
- **1 pt :** $M^3 = 3^2 M$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de M^k puis la démontrer par récurrence.

- **1 pt : conjecture, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1}M$**
- **1 pt : initialisation**
- **1 pt : hérédité**

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

- **2 pts : calcul**

d) En déduire que e^M existe et que :

$$\mathrm{e}^M = I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

- **1 pt :** $\frac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(\mathbf{e}^3 - 1\right)$
- **1 pt : d'après la question *3.a)*,** $\frac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathbf{e}^3-1}{3}M$
- **1 pt : d'après la question *3.b)*,** $S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I + \frac{\mathbf{e}^3-1}{3}M$

7. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie I et on réutilise les notations de la question ***2.b)***. On fixe un réel t.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

- **1 pt :** $A = PDP^{-1}$**. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout** $k \in \mathbb{N}$**,** $A^k = PD^kP^{-1}$
- **1 pt :** $S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$

b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t.

- **1 pt : D'après la question *4*, la matrice** $\mathbf{e}^{tD}$ **existe et vaut**

$$\mathbf{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^t \end{pmatrix}$$

- **1 pt : D'après la question *3.b)* et la question précédente, on a alors**

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\mathbf{e}^{tD}P^{-1}$$

- **1 pt :** $\mathbf{e}^{tA}$ **existe et** $\mathbf{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ **avec**

$$\Delta(t) = \mathbf{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}^t \end{pmatrix}$$

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$(S) \iff X' = AX$$

où A est la matrice étudiée dans la partie I.

8. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

- **1 pt : (u,v,w) est un état d'équilibre de (S) $\iff$ $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A)$**
- **1 pt : l'ensemble des états d'équilibre de (S) est**

$$\mathrm{Vect}\left((3,1,-2)\right) = \{\lambda(3,1,-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

9. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S). On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

- **1 pt : X et Y sont solutions du même problème de Cauchy**
- **1 pt : tout problème de Cauchy admet une unique solution donc $X = Y$**

10. Justifier que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\left\{t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1 \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **1 pt : La matrice A est diagonalisable (cf question *2.b)*)**
- **1 pt : on a montré à la question *2.a)* que (U_{-1}, U_0, U_1) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A**

11. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera X_1.

- **1 pt : écriture correcte du système** $\begin{cases} 2\alpha + 3\beta - 2\gamma = 9 \\ \alpha + \beta = 4 \\ -2\alpha - 2\beta + \gamma = -8 \end{cases}$
- **1 pt :** $\alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$
- **1 pt :** $X_1(t) = 3\mathrm{e}^{-t} U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6\mathrm{e}^{-t} + 3 \\ 3\mathrm{e}^{-t} + 1 \\ -6\mathrm{e}^{-t} - 2 \end{pmatrix}$

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

- **1 pt : $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $z_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -2$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$**
- **1 pt : d'après la question *9*, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel (S)**

b) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera X_2.

- **1 pt : écriture correcte du système** $\left\{\begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & =3 \\ \alpha & +\ \beta & & =2 \\ -2\alpha & -2\beta & +\ \gamma & =-3 \end{array}\right.$

- **1 pt :** $\alpha U_{-1}+\beta U_0+\gamma U_1=\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{lll} \alpha & & =1 \\ & \beta & =1 \\ & & \gamma=1 \end{array}\right.$

- **1 pt :** $X_2(t)=\mathrm{e}^{-t}U_{-1}+U_0+\mathrm{e}^tU_1=\begin{pmatrix}2\mathrm{e}^{-t}+3-2\mathrm{e}^t\\ \mathrm{e}^{-t}+1\\ -2\mathrm{e}^{-t}-2+\mathrm{e}^t\end{pmatrix}$

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

- **1 pt :** $z_2(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. **La trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.**

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

- **1 pt : La figure 4 est la seule où l'on a $z(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution X_2.**
- **2 pts : Dans la figure 3, on a $z(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution X_1.**
  Dans la figure 1, on a $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}z(t)=0$. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution X_1 donc cette figure ne correspond pas à X_1.
  Par élimination, la figure 2 correspond à la solution X_1. De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que $x_1(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}3$, $y_1(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et $z_1(t)\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}-2$.

12. Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

a) On fixe $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ et on considère la solution de (S) :

$$X : t\mapsto \alpha\mathrm{e}^{-t}U_{-1}+\beta U_0+\gamma\mathrm{e}^tU_1$$

On pose $C=P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (où P est définie à la question ***2.b)***).

Montrer que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $X(t)=\mathrm{e}^{tA}C$.

- **2 pts : calcul correct**

b) Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

- **1 pt : la formule obtenue est analogue**

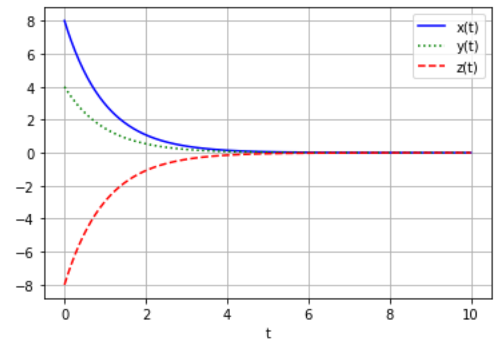

Fig. 1 Tracé 1

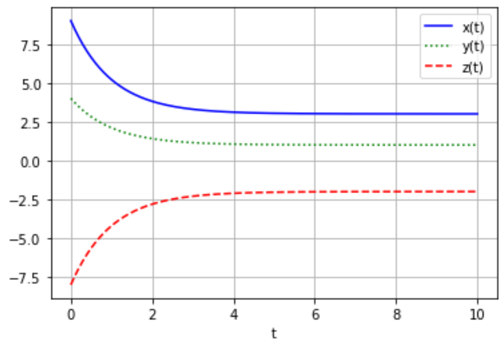

Fig. 2 Tracé 2

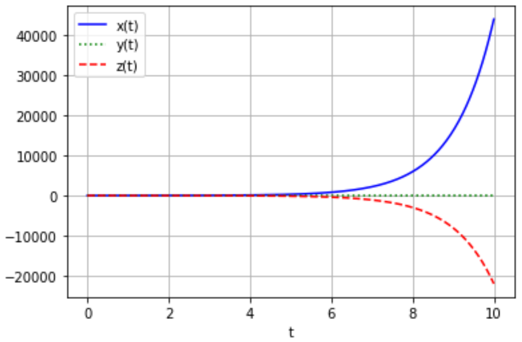

Fig. 3 Tracé 3

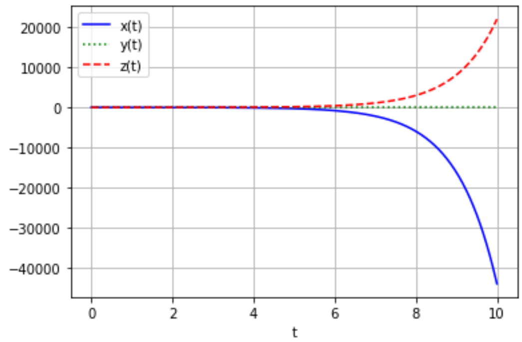

Fig. 4 Tracé 4

Problème 2 (ECRICOME 2025)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit n un entier naturel non nul.
La population active d'un territoire est divisée en n catégories socioprofessionnelles, numérotées de 1 à n.
Pour tout entier i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire égale au revenu mensuel, en milliers d'euros, d'un individu choisi au hasard avec équiprobabilité au sein de la catégorie socioprofessionnelle numéro i. On suppose que la variable aléatoire X_i admet pour densité la fonction f_i définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{i}{x^{i+1}} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

On note F_i la fonction de répartition de X_i.

Partie I.

1. Vérifier que, pour tout entier i compris entre 1 et n, la fonction f_i est une densité de probabilité.

- **1 pt : pour tout** $x \in \mathbb{R}$**,** $f_i(x) \geqslant 0$
- **1 pt :** f_i **est continue sur** $\mathbb{R}$ **sauf éventuellement en** 1
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^B \frac{i}{x^{i+1}}\, dx = 1 - \frac{1}{B^i}$ **donc l'intégrale** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\, dx$ **converge et vaut** 1

2. ***a)*** Déterminer les entiers naturels i, compris entre 1 et n, tels que X_i admet une espérance, et déterminer alors l'espérance de X_i.

- **1 pt : la variable aléatoire X_i admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\, dx$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment**
- **1 pt :** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^i}\, dx$ **converge si et seulement si** $i > 1$
- **1 pt :** $\mathbb{E}(X_i) = \dfrac{i}{i-1}$

b) En justifiant la réponse, classer les numéros de catégorie socioprofessionnelle dans l'ordre de leur revenu mensuel moyen, du moins élevé au plus élevé.

On ne considérera que les entiers i pour lesquels l'espérance de X_i est bien définie.

- **1 pt :** $u_{i+1} - u_i = \dfrac{i+1}{i} - \dfrac{i}{i-1} = \dfrac{(i+1)(i-1) - i^2}{i(i-1)} = \dfrac{i^2 - 1 - i^2}{i(i-1)} = -\dfrac{1}{i(i-1)} < 0$
- **1 pt : le classement des catégories socioprofessionnelles dans l'ordre de leur revenu mensuel moyen, du moins élevé au plus élevé, est donc :** $n, n-1, \ldots, 2$

3. Montrer que, pour tout entier i compris entre 1 et n et pour tout réel x :

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases} \tag{1}$$

- **1 pt :** f_i **est nulle en dehors de** $[1, +\infty[$ **donc on peut considérer que** $X_i(\Omega) = [1, +\infty[$
- **2 pt :** $F_i : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \textbf{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \textbf{si } x < 1. \end{cases}$

4. Soit U une variable aléatoire à densité de loi uniforme sur $]0,1[$.

Soit i un entier compris entre 1 et n. On pose $V_i = \dfrac{1}{U^{1/i}}$.

a) Montrer que V_i suit la même loi que X_i.

- **1 pt :** $V_i(\Omega) = g_i(U)(\Omega) = g_i(U(\Omega)) = g_i(]0,1[) =]1, +\infty[$
- **1 pt :** $F_{V_i}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \textbf{si } x > 1 \\ 0 & \textbf{si } x \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \textbf{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \textbf{si } x < 1 \end{cases} = F_i(x)$
- **1 pt : la fonction de répartition caractérisant la loi, il suit que V_i et X_i suivent la même loi**

b) Écrire une fonction en langage **Python** nommée `simulX`, prenant en argument d'entrée l'entier i, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire X_i.

```
def simulX(i):
    U = rd.random()
    return 1 / U ** (1/i)
```

- **1 pt :** `U = rd.random()`
- **1 pt :** `return 1 / U ** (1/i)`

Partie II.

Soit p un réel de $]0,1[$. On choisit un individu au hasard dans la population et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie socioprofessionnelle à laquelle cet individu appartient. On suppose que la variable aléatoire $Y - 1$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, p)$.

5. En utilisant uniquement la fonction `random` du module `numpy.random`, écrire une fonction en langage **Python** nommée `simulY`, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Y.

```
def simulY(n,p):
    W = 0
    for k in range(n-1):
        if rd.random() < p:
            W += 1
    return W + 1
```

- **2 pt : simulation de $W \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1,p)$ (dont 1 pt pour la boucle `for` de bonne taille)**
- **1 pt :** `return W + 1`

6. Recopier et compléter la fonction, en langage **Python**, nommée `loiY`, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, et renvoyant une liste $(p_1, \dots, p_n)$ où pour i compris entre 1 et n, p_i est une valeur approchée de $\mathbb{P}(Y = i)$.

```
def loiY(n,p):
    N = 10000
    loi = [0] * n
    for k in ------ :
        y = simulY(n,p)
        loi[--] --
    return loi
```

```
def loiY(n,p):
    N = 10000
    loi = [0] * n
    for k in range(N) :
        y = simulY(n,p)
        loi[y-1] = loi[y-1] + 1/N
    return loi
```

- **1 pt :** `for k in range(N) :`
- **2 pt :** `loi[y-1] = loi[y-1] + 1/N`

7. Écrire une fonction **Python**, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, permettant d'afficher un diagramme en bâtons représentant approximativement la loi de Y. On représentera les valeurs de Y en abscisses et les probabilités correspondantes en ordonnées. On pourra utiliser les fonctions définies dans les questions précédentes, et l'annexe fournie en fin de sujet.

```
def diagrammeY(n,p):
    Xabs = [k for k in range(1,n+1)]
    Yord = loiY(n,p)
    plt.bar(Xabs, Yord)
    plt.show()
```

- **1 pt :** `Xabs = [k for k in range(1,n+1)]`
- **1 pt :** `Yord = loiY(n,p)`
- **1 pt :** `plt.bar(Xabs, Yord)`

8. Dans cette question, on suppose que chaque profession est identifiée de manière unique par un numéro appelé code PCS.

Par ailleurs, les différentes professions sont regroupées dans six grandes catégories socioprofessionnelles, que l'on identifie par un entier de 1 à 6.

On dispose d'une base de données comportant trois tables nommées `individu`, `departement` et `profession`, décrites ci-dessous.

- La table `individu` contient des informations sur tous les individus de la population active française. Chaque entrée correspond donc à un individu. La table comporte les attributs suivants.
  - ◇ `i_nom` (de type `TEXT`) : le nom de l'individu.
  - ◇ `i_prenom` (de type `TEXT`) : le prénom de l'individu.
  - ◇ `i_departement` (de type `INTEGER`) : le numéro de département où réside l'individu.
  - ◇ `i_insee` (de type `INTEGER`) : le numéro INSEE (ou numéro de sécurité sociale) de l'individu.
  - ◇ `i_code_profession` (de type `INTEGER`) : le code PCS identifiant la profession actuelle de l'individu.
- La table `departement` contient des informations sur les départements français. Chaque entrée correspond donc à un département. La table comporte les attributs suivants.
  - ◇ `d_numero` (de type `INTEGER`) : le numéro du département.
  - ◇ `d_nom` (de type `TEXT`) : le nom du département.
  - ◇ `d_population` (de type `INTEGER`) : le nombre d'habitants vivant dans le département.
- La table `profession` contient des informations sur toutes les professions recensées dans la base de données. Chaque entrée correspond donc à une profession différente. La table comporte les attributs suivants.
  - ◇ `p_pcs` (de type `INTEGER`) : le code PCS permettant d'identifier la profession.
  - ◇ `p_categorie` (de type `INTEGER`) : le numéro de la catégorie socioprofessionnelle (de 1 à 6) à laquelle la profession se trouve rattachée.
  - ◇ `p_intitule` (de type `TEXT`) : l'intitulé de la profession (par exemple, `chirurgien dentiste`).

a) Que doit vérifier la clé primaire d'une table dans une base de données ?

- **1 pt : une clé primaire identifie chaque enregistrement d'une table de manière unique**

b) Pour chacune des trois tables de la base de données de cet exemple, indiquer sans justification un attribut pouvant jouer le rôle de clé primaire.

- **2 pt : L'attribut `i_insee` peut jouer le rôle de clé primaire de la table `individu`. L'attribut `d_numero` peut jouer le rôle de clé primaire de la table `departement`. L'attribut `p_pcs` peut jouer le rôle de clé primaire de la table `profession`**

  (1 pt pour la première clé correcte, 2pt si tout est juste)

c) Dresser un schéma relationnel de la base de données décrite ci-dessus, en mettant en évidence les relations qui existent entre les tables et les attributs permettant d'établir ces relations.

On s'assurera que chaque table est reliée à au moins l'une des deux autres tables.

- **1 pt : Dans le schéma relationnel suivant, on choisit de mettre en non-gras les clés primaires et de mettre en italique les clés étrangères :**

  `individu`(**i_nom, i_prenom,** ***i_departement***, i_insee, ***i_code_profession***)

  `departement`(d_numero, **d_nom, d_population**)

  `profession`(p_pcs, **p_categorie, p_intitule**)

- **1 pt : L'attribut *i_departement* de la table** `individu` **est une clé étrangère pointant vers l'attribut d_numero de la table** `departement`**.**

  L'attribut *i_code_profession* de la table `individu` **est une clé étrangère pointant vers l'attribut p_pcs de la table** `profession`**.**

d) Écrire une requête SQL renvoyant tous les codes PCS des professions exercées dans le département de l'Eure-et-Loir (numéro 28). Chaque code PCS ne pourra apparaître qu'une seule fois.

On pourra utiliser la commande `DISTINCT` décrite dans l'annexe fournie en fin de sujet.

```
SELECT DISTINCT i_code_profession
FROM individu
WHERE i_departement = 28
```

- **1 pt :** `SELECT DISTINCT i_code_profession FROM individu`
- **1 pt :** `WHERE i_departement = 28`

e) Écrire une requête SQL permettant d'obtenir le numéro de catégorie socioprofessionnelle (entre 1 et 6) de chaque individu.

La requête devra renvoyer deux attributs pour chaque individu : son numéro INSEE, et la catégorie socioprofessionnelle à laquelle est rattachée sa profession.

```
SELECT i_insee, p_categorie
FROM individu INNER JOIN profession
ON individu.i_code_profession = profession.p_pcs
```

- **1 pt :** `SELECT i_insee, p_categorie`
- **1 pt :** `FROM individu INNER JOIN profession`
- **1 pt :** `ON individu.i_code_profession = profession.p_pcs`

Partie III.

Soit p un réel de $]0,1[$.

Un institut réalise un sondage selon le protocole suivant :

- On choisit une catégorie socioprofessionnelle de manière aléatoire (mais sans équiprobabilité), et on note Y la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie choisie.

  Comme dans la partie **II**, on suppose que $Y-1$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1,p)$.
- On sélectionne alors un individu au hasard (avec équiprobabilité) dans la catégorie socioprofessionnelle choisie à l'étape précédente, et on note Z_n la variable aléatoire égale à son revenu mensuel, en milliers d'euros.

Enfin, on rappelle que, pour tout entier i compris entre 1 et n, la fonction de répartition F_i de la variable aléatoire X_i est donnée par l'égalité (1) montrée à la question ***3***.

On note G_n la fonction de répartition de la variable aléatoire Z_n.

9. Expliciter $G_n(x)$ pour tout réel x strictement inférieur à 1.

- **1 pt : pour tout** $x<1$**,** $G_n(x)=0$

10. Soit x un réel supérieur ou égal à 1.

a) Justifier que pour tout entier i compris entre 1 et n :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leqslant x) = F_i(x).$$

- **1 pt :** $\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z_n \leqslant x]) = \mathbb{P}_{[Y=i]}([X_i \leqslant x]) = \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) = F_i(x)$
- **1 pt : par indépendance de** X_i **et** Y

b) Montrer que :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x)\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}.$$

- **1 pt : formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements** $([Y=i])_{i\in[\![1,n]\!]}$
- **1 pt :** $G_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y=i])F_i(x)$
- **2 pt : fin du calcul (dont 1pt pour les justifications)**

c) En déduire que :

$$G_n(x) = 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}.$$

- **1 pt :** $G_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} - \frac{1}{x}\sum\limits_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\left(\frac{p}{x}\right)^k(1-p)^{n-1-k}$
- **1 pt : justification avec** $x \geqslant 1$
- **1 pt : application du binôme de Newton et fin du calcul**

11. Justifier que Z_n est une variable aléatoire à densité.

- **1 pt :** G_n **est de classe** $\mathcal{C}^1$ **sur** $]-\infty,1[$ **car constante et sur** $]1,+\infty[$ **car elle y coïncide avec une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur** $]1,+\infty[$
- **1 pt :** G_n **est continue en** 1 **car**

$$\lim_{x\to 1^+} G_n(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n} = 1 - \frac{1^{n-1}}{1^n} = 0 = G_n(0) = \lim_{x\to 1^-} G_n(x)$$

12. En utilisant les fonctions `simulX` et `simulY` définies aux questions ***4.b)*** et ***5***, écrire une fonction en langage **Python** nommée `sondage`, prenant en arguments d'entrée les paramètres n et p, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire Z_n.

```
def sondage(n,p):
    i = simulY(n,p)
    return simulX(i)
```

- **1 pt :** `i = simulY(n,p)`
- **1 pt :** `return simulX(i)`

13. Dans cette question uniquement, on suppose que $p = \frac{1}{n}$.

a) Montrer que, pour tout x réel :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

- **2 pt : calcul correct**

b) Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

- **1 pt : si** $x \leqslant 1$**,** $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 0$
- **1 pt :** $(n-1)\ln\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -(n-1)\dfrac{x-1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{1-x}{x}$
- **1 pt : continuité de l'exponentielle**
- **1 pt : si** $x > 1$**,** $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x) = 1 - \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1-x}{x}}$