# DS5 correction (version A)

## Problème 1 (sujet maison)

### Partie I : Etude d'une matrice $A$

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

***1. a)*** On exécute le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
 [ 1  1  2]
 [-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

*Démonstration.* D'après l'affichage **Python** : $\boxed{A^3 = A}$. □

***b)*** En déduire les valeurs propres possibles de $A$.

*Démonstration.* D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de $A$. Or,

$$P(X) = X(X^2 - 1) = X(X - 1)(X + 1)$$

On en déduit que

$$\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P(X)\} = \{-1, 0, 1\}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1,\ 0 \text{ et } 1}$. □

***2. a)*** Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de $A$.

*Démonstration.* Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

•

$$\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) &\iff (A+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 2z &=& 0 \\ x + 2y + 2z &=& 0 \\ -2x \qquad - 2z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 3x - 2y + 2z &=& 0 & \\ x + 2y + 2z &=& 0 & \\ x \qquad + \ z &=& 0 & L_3 \longleftarrow -\frac{1}{2} L_3 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 3x - 2y + 2z &=& 0 & \\ 8y + 4z &=& 0 & L_3 \longleftarrow 3L_2 - L_1 \\ 2y + \ z &=& 0 & L_3 \longleftarrow 3L_3 - L_1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y + 2z &=& 0 \\ 2y + \ z &=& 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 2y &=& -2z \\ 2y &=& -z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcll} 3x &=& -3z & L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \\ 2y &=& -z & \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -z \\ y &=& -\frac{1}{2} z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2} z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{1}{2} z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc $-1$ est valeur propre de $A$. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ :

— engendre $E_{-1}(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul donc $\boxed{\mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(A)}$.

-

$$\begin{aligned}
U \in E_0(A) &\iff AU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ -2y - z = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y = -z \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -3z & L_1 \longleftarrow 2L_1 + L_2 \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_0(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{3}{2}z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2}z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_0(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 0 est valeur propre de $A$. De plus, la famille $\mathcal{F}_0 = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ :

— engendre $E_0(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_0 \text{ est une base de } E_0(A)}$.

- $$\begin{aligned}
U \in E_1(A) &\iff (A-I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & & & + & 2z & = & 0 \\ -2x & & & - & 4z & = & 0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ x \qquad + 2z = 0 \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ \qquad 2y \qquad = 0 \end{array}\right. \qquad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x \qquad = -2z \\ \qquad y = 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

  On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0 \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\}\\
&= \operatorname{Vect}\left( \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

  $E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 1 est valeur propre de $A$. De plus, la famille $\mathcal{F}_1 = \left( \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ :

  — engendre $E_1(A)$

  — est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

  donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(A)}$.

Les valeurs propres possibles de $A$ sont $-1, 0, 1$ et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de $A$. Donc

$$\boxed{\operatorname{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}}$$

□

***b)*** Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices $P$ et $D$.

*Démonstration.* La matrice $A$ est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc $A$ est diagonalisable. Ainsi, il existe

- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de $A$

- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de $A$

telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, on a bien $A = PDP^{-1}$. □

## Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on le note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel $n$,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note $\mathrm{e}^M$ cette limite.

*3. Deux résultats théoriques.* On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

***a)*** Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et soit $(\alpha_n)$ une suite réelle convergente, de limite $\ell$. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

*Démonstration.* Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \alpha_n M &= \alpha_n \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_n a & \alpha_n b & \alpha_n c \\ \alpha_n d & \alpha_n e & \alpha_n f \\ \alpha_n g & \alpha_n h & \alpha_n i \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \ell a & \ell b & \ell c \\ \ell d & \ell e & \ell f \\ \ell g & \ell h & \ell i \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \ell M \end{aligned}$$

□

***b)*** Soient $(M_n)$ et $(M'_n)$ deux suites de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} (M_n + M'_n) = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} (M_n M'_n) = MM'$$

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $$\begin{aligned} M_n + M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n + a'_n & b_n + b'_n & c_n + c'_n \\ d_n + d'_n & e_n + e'_n & f_n + f'_n \\ g_n + g'_n & h_n + h'_n & i_n + i'_n \end{pmatrix} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ d + d' & e + e' & f + f' \\ g + g' & h + h' & i + i' \end{pmatrix} = M + M' \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} M_n M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n a'_n + b_n d'_n + c_n g'_n & a_n b'_n + b_n e'_n + c_n h'_n & a_n c'_n + b_n f'_n + c_n i'_n \\ d_n a'_n + e_n d'_n + f_n g'_n & d_n b'_n + e_n e'_n + f_n h'_n & d_n c'_n + e_n f'_n + f_n i'_n \\ g_n a'_n + h_n d'_n + i_n g'_n & g_n b'_n + h_n e'_n + i_n h'_n & g_n c'_n + h_n f'_n + i_n i'_n \end{pmatrix} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} aa' + bd' + cg' & ab' + be' + ch' & ac' + bf' + ci' \\ da' + ed' + fg' & db' + ee' + fh' & dc' + ef' + fi' \\ ga' + hd' + ig' & gb' + he' + ih' & gc' + hf' + ii' \end{pmatrix} = MM' \end{aligned}$$

□

*Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.*

**4.** Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{e}^D$ existe et vaut $\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}$.
*Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.*

*Démonstration.* Soit $k \in \mathbb{N}$. La matrice $D$ étant diagonale, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} S_n(D) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!}a^k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!}b^k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k!}c^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}c^k \end{pmatrix} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en reconnaissant des sommes partielles de séries exponentielles. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{e}^D \text{ existe et } \mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}}$$

□

***5.*** Dans cette question uniquement, la matrice $M$ est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

***a)*** Calculer $M^2$ et $M^3$. En déduire la matrice $M^k$ pour tout entier naturel $k$.

*Démonstration.* On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $k \geqslant 3$, $M^k = M^3 M^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} M^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Finalement,

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ M^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } k = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 2 \\ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \text{si } k \geqslant 3 \end{cases}}$$

□

***b)*** Donner, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice $e^M$.

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} M^k + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!} M^k && \text{par Chasles, car } n \geqslant 2 \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} M^k && \text{car } M^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \text{ si } k \geqslant 3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(S_n(M))$ est constante à partir du rang 2. On en déduit que

$$S_n(M) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{e^M \text{ existe et } e^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

***6.*** Dans cette question uniquement, la matrice $M$ est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

***a)*** Calculer $M^2$ et $M^3$ en fonction de $M$.

*Démonstration.* On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M$$

et

$$M^3 = M^2 M = (3M)M = 3M^2 = 3(3M) = 3^2 M$$

□

***b)*** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de $M^k$ puis la démontrer par récurrence.

*Démonstration.* D'après la question précédente, on conjecture que $M^k = 3^{k-1}M$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$ : « $M^k = 3^{k-1}M$ ».
Initialisation :
D'une part, $M^1 = M$. D'autre part, $3^{1-1}M = 3^0 M = M$. D'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= MM^k \\ &= M(3^{k-1}M) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^{k-1}M^2 \\ &= 3^{k-1}(3M) && \text{cf la question } \textbf{\textit{6.a)}} \\ &= 3^k M \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.
Par principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = 3^{k-1}M}$. □

***c)*** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

*Démonstration.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \\ &= M^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} M^k && \text{par Chasles, car } n \geqslant 1 \\ &= I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 3^{k-1} M \\ &= I + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} 3^k M \\ &= I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!}\right) M \\ &= \boxed{I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M} \end{aligned}$$

Vérifions que cette égalité est valable pour $n = 0$.

- D'une part, $S_0(M) = \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} M^k = \frac{1}{0!} M^0 = I$
- D'autre part, $I + \frac{1}{3} \left( \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M = I + \frac{1}{3} (1-1) M = I$

D'où l'égalité pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. □

***d)*** En déduire que $e^M$ existe et que :

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

*Démonstration.* On reconnaît une somme partielle de série exponentielle, d'où

$$\frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1 \right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \left( e^3 - 1 \right)$$

D'après la question ***3.a)***,

$$\frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{e^3 - 1}{3} M$$

puis, d'après la question ***3.b)***,

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

Donc

$$\boxed{e^M \text{ existe et } e^M = I + \frac{e^3-1}{3} M.}$$

□

**7.** Dans cette question, on considère la matrice $A$ de la Partie I et on réutilise les notations de la question ***2.b)***. On fixe un réel $t$.

***a)*** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$S_n(tA) = P S_n(tD) P^{-1}$$

*Démonstration.* D'après la question ***2.b)***, $A = PDP^{-1}$. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n(tA) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (tA)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} PD^kP^{-1} \\
&= P \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} D^k \right) P^{-1} \\
&= P \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (tD)^k \right) P^{-1} \\
&= P S_n(tD) P^{-1}
\end{aligned}$$

□

***b)*** Conclure que $\mathrm{e}^{tA}$ existe et en donner une expression sous la forme $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de $t$.

*Démonstration.* On remarque que la matrice $tD$ est diagonale et, plus précisément,

$$tD = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

D'après la question ***4***, la matrice $\mathrm{e}^{tD}$ existe et vaut

$$\mathrm{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

Ceci veut exactement dire que

$$S_n(tD) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \tag{1}$$

D'après la question ***3.b)*** et la question précédente, on a alors

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}$$

On en déduit que $\mathrm{e}^{tA}$ existe et $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ avec

$$\Delta(t) = \mathrm{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

□

*En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).*

## Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues $x, y, z$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$(S) \iff X' = AX$$

où $A$ est la matrice étudiée dans la partie I.

***8.*** Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire $(S)$.

*Démonstration.* Soit $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(u,v,w) \text{ est un état d'équilibre de } (S) &\iff A\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A) \\
&\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{cf question } \textbf{\textit{2.a)}}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des états d'équilibre de $(S)$ est

$$\mathrm{Vect}\left((3,1,-2)\right) = \{\lambda(3,1,-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

***9.*** Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient $X$ et $Y$ deux solutions de $(S)$. On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur $X$ et $Y$ ?

*Démonstration.* Notons $W = X(t_0) = Y(t_0)$. Sous ces hypothèses, $X$ et $Y$ sont deux solutions du même problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} Z'(t) = AZ(t) \\ Z(t_0) = W \end{cases} , \qquad \text{d'inconnue } Z$$

Or, tout problème de Cauchy admet une unique solution. On en déduit que $X = Y$, *i.e.* pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = Y(t)$. □

***10.*** Justifier que l'ensemble des solutions de $(S)$ est :

$$\left\{t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1 \mid (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*Démonstration.* La matrice $A$ est diagonalisable (cf question ***2.b)***) et on a montré à la question ***2.a)*** que $(U_{-1}, U_0, U_1)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de $A$. D'après le cours, les solutions de $(S)$ sont toutes de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta \mathrm{e}^{0t} U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1 \\ &= \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1 \end{aligned}$$

où $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$. □

***11.*** On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

***a)*** ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera $X_1$.

*Démonstration.* On considère une solution $X$ quelconque de $(S)$ :

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1$$

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_1) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 9 \\ \alpha & +\ \beta & & = 4 \\ -2\alpha & -2\beta & +\ \gamma & = -8 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrll} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 9 & \\ & -\ \beta & +2\gamma & = -1 & L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ & \beta & -\ \gamma & = 1 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrll} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 9 & \\ & -\ \beta & +2\gamma & = -1 & \\ & & \gamma & = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & & = 9 \\ & -\ \beta & & = -1 \\ & & \gamma & = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrl} \alpha & & & = 3 \\ & \beta & & = 1 \\ & & \gamma & = 0 \end{array}\right. \quad \text{par remontées successives}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution $X_1$ du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$ est donné par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X_1(t) = 3e^{-t} U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}}$$

□

***ii)*** Montrer que la trajectoire associée à la solution $X_1$ est convergente. Expliciter le point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$. Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire $(S)$ ?

*Démonstration.* D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

donc $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $z_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -2$. Ainsi la trajectoire associée à la solution $X_1$ est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$. D'après la question ***9***, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel $(S)$. □

***b)*** ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera $X_2$.

*Démonstration.* On considère une solution $X$ quelconque de $(S)$ :

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1$$

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_2) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 3 \\ \alpha & + & \beta & & & = & 2 \\ -2\alpha & - & 2\beta & + & \gamma & = & -3 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 3 & \\ & - & \beta & + & 2\gamma & = & 1 & \quad L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ & & \beta & - & \gamma & = & 0 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} 2\alpha & + & 3\beta & - & 2\gamma & = & 3 & \\ & - & \beta & + & 2\gamma & = & 1 & \\ & & & & \gamma & = & 1 & \quad L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{lll} \alpha & & = 1 \\ & \beta & = 1 \\ & & \gamma = 1 \end{array} \right. \quad \text{par remontées successives}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution $X_2$ du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$ est donné par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X_2(t) = e^{-t} U_{-1} + U_0 + e^t U_1 = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}}$$

□

***ii)*** Montrer que la trajectoire associée à la solution $X_2$ est divergente.

*Démonstration.* D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $z_2(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi la trajectoire associée à la solution $X_2$ est divergente. □

***c)*** On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire $(S)$. Dire quels sont les tracés associés aux solutions $X_1$ et $X_2$ étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

*Démonstration.* • La figure 4 est la seule où l'on a $z(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution $X_2$.

- Dans la figure 3, on a $z(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution $X_1$.
- Dans la figure 1, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution $X_1$ donc cette figure ne correspond pas à $X_1$.
- Par élimination, la figure 2 correspond à la solution $X_1$. De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que $x_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $z_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -2$.

$\square$

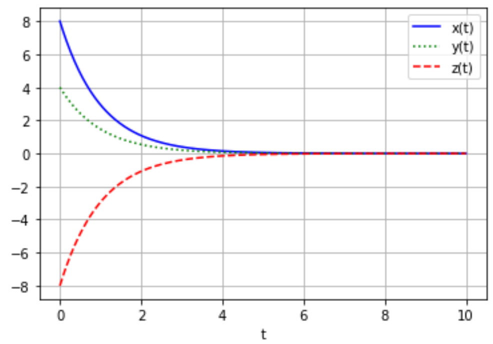


**Fig. 1** Tracé 1

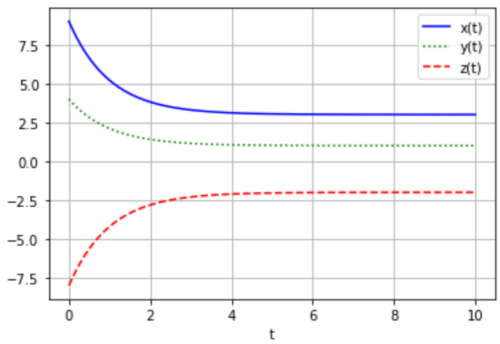


**Fig. 2** Tracé 2

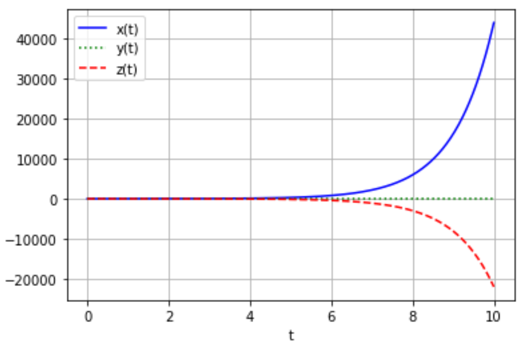


**Fig. 3** Tracé 3

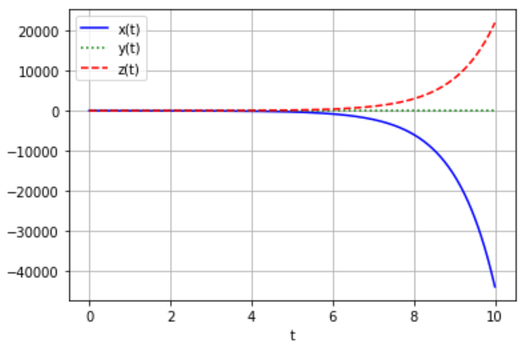


**Fig. 4** Tracé 4

***12.*** Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

***a)*** On fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et on considère la solution de $(S)$ :

$$X : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1$$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (où $P$ est définie à la question ***2.b)***).

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \mathrm{e}^{tA} C$.

*Démonstration.* Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
e^{tA}C &= Pe^{tD}P^{-1}P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} && \text{cf question } \textbf{\textit{7.b)}}\\
&= Pe^{tD}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & e^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}\alpha e^{-t}\\ \beta\\ \gamma e^{t}\end{pmatrix}\\
&= P\left(\alpha e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma e^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \alpha e^{-t}P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma e^{t}P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \alpha e^{-t}U_{-1}+\beta U_0+\gamma e^{t}U_1\\
&= X(t)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $P$ est précisément la matrice obtenue en concaténant les vecteurs colonnes $U_{-1}$, $U_0$ et $U_1$. □

***b)*** Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

*Démonstration.* Considérons une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 :

$$y' = ay$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre.
D'après le cours, les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y(t) = ce^{at}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on a montré à la question précédente que les solutions de $X' = AX$ admettaient une « formule exponentielle » analogue : $c \in \mathbb{R}$ est analogue à $C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (paramètre(s) à choisir) et $e^{at}$ est analogue à $e^{tA}$. □

## Problème 2 (ECRICOME 2025)

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Soit $n$ un entier naturel non nul.
La population active d'un territoire est divisée en $n$ catégories socioprofessionnelles, numérotées de 1 à $n$.
Pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, on note $X_i$ la variable aléatoire égale au revenu mensuel, en milliers d'euros, d'un individu choisi au hasard avec équiprobabilité au sein de la catégorie socioprofessionnelle numéro $i$. On suppose que la variable aléatoire $X_i$ admet pour densité la fonction $f_i$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{i}{x^{i+1}} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

On note $F_i$ la fonction de répartition de $X_i$.

### Partie I.

***1.*** Vérifier que, pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, la fonction $f_i$ est une densité de probabilité.

*Démonstration.*
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- Pour tout $x < 1$, $f_i(x) = 0 \geqslant 0$. Pour tout $x \geqslant 1$, $f_i(x) = \dfrac{i}{x^{i+1}} \geqslant 0$.
- La fonction $f_i$ est continue sur $]-\infty, 1[$ car constante et continue sur $]1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction polynomiale qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$. Ainsi, $f_i$ est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1.
- Tout d'abord :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\, dx &= \int_{1}^{+\infty} f_i(x)\, dx && \textit{(car } f_i \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^{i+1}}\, dx \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{i}{x^{i+1}}$ est continue sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{i}{x^{i+1}}\, dx$ est impropre en $+\infty$. Soit $B \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} \int_1^B \frac{i}{x^{i+1}}\, dx &= \left[ -\frac{1}{x^i} \right]_1^B \\ &= 1 - \frac{1}{B^i} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1 && \textit{(car } i > 0\textit{)} \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_i(x)\, dx$ converge et vaut 1.

$$\boxed{\text{La fonction } f_i \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

□

**Commentaire**

On dit que la variable aléatoire $X_i$, de densité $f_i$, suit une loi de Pareto de paramètres $(i, 1)$. L'étude des lois de Pareto est un grand classique des écrits en ECG.

***2. a)*** Déterminer les entiers naturels $i$, compris entre 1 et $n$, tels que $X_i$ admet une espérance, et déterminer alors l'espérance de $X_i$.

*Démonstration.*
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

La variable aléatoire $X_i$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\, dx$ converge absolument, ce qui revient à montrer la convergence pour ce calcul de moment. De plus :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} x f_i(x)\, dx &= \int_{1}^{+\infty} x f_i(x)\, dx \qquad \textit{(car } f_i \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{1}^{+\infty} \frac{i}{x^i}\, dx\end{aligned}$$

Il s'agit d'une intégrale de Riemann. D'après le critère de Riemann, cette intégrale converge si et seulement si $i > 1$. On suppose dans la suite que $i > 1$. Soit $B \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\int_{1}^{B} \frac{i}{x^i}\, dx &= \left[ -\frac{i}{(i-1)x^{i-1}} \right]_1^B \\ &= \frac{i}{i-1} - \frac{i}{(i-1)B^{i-1}} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{i}{i-1} \qquad \textit{(car } i-1 > 0\textit{)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La variable aléatoire } X_i \text{ admet une espérance si et seulement si } i \in [\![2, n]\!], \text{ et dans ce cas } \mathbb{E}(X_i) = \frac{i}{i-1}.}$$

□

***b)*** En justifiant la réponse, classer les numéros de catégorie socioprofessionnelle dans l'ordre de leur revenu mensuel moyen, du moins élevé au plus élevé.
*On ne considérera que les entiers $i$ pour lesquels l'espérance de $X_i$ est bien définie.*

*Démonstration.*
Posons, pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, $u_i = \dfrac{i}{i-1}$. On a, pour tout $i \in [\![2, n-1]\!]$ :

$$u_{i+1} - u_i = \frac{i+1}{i} - \frac{i}{i-1} = \frac{(i+1)(i-1) - i^2}{i(i-1)} = \frac{i^2 - 1 - i^2}{i(i-1)} = -\frac{1}{i(i-1)} < 0$$

Ainsi, la suite $(u_i)_{i \in [\![2,n]\!]}$ est décroissante.

$$\boxed{\text{Le classement des catégories socioprofessionnelles dans l'ordre de leur revenu mensuel moyen, du moins élevé au plus élevé, est donc : } n, n-1, \dots, 2.}$$

□

*3.* Montrer que, pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$ et pour tout réel $x$ :

$$F_i(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases} \tag{2}$$

*Démonstration.*
Soit $i \in [\![1, n]\!]$.

- La densité $f_i$ est nulle en dehors de $[1, +\infty[$ donc on peut considérer que $X_i(\Omega) = [1, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x < 1$, alors $F_i(x) = \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
  × Si $x \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} F_i(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_i(t)\, dt \\ &= \int_{1}^{x} f_i(t)\, dt && \textit{(car } f_i \textit{ est nulle en dehors de } [1, +\infty[\textit{)} \\ &= \int_{1}^{x} \frac{i}{t^{i+1}}\, dt \\ &= 1 - \frac{1}{x^i} && \textit{(d'après le calcul effectué en question } \textbf{\textit{1}}\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } F_i : x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}}$$

□

*4.* Soit $U$ une variable aléatoire à densité de loi uniforme sur $]0, 1[$.
Soit $i$ un entier compris entre 1 et $n$. On pose $V_i = \dfrac{1}{U^{1/i}}$.

***a)*** Montrer que $V_i$ suit la même loi que $X_i$.

*Démonstration.*

- On pose $g_i : x \mapsto \dfrac{1}{x^{1/i}}$ de sorte que $V_i = g_i(U)$. On a alors :

$$V_i(\Omega) = g_i(U)(\Omega) = g_i(U(\Omega)) = g_i(]0, 1[) = ]1, +\infty[$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  × Si $x \leqslant 1$, alors $F_{V_i}(x) = \mathbb{P}([V_i \leqslant x]) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$.

× Si $x > 1$, alors :

$$\begin{aligned}
F_{V_i}(x) &= \mathbb{P}([V_i \leqslant x]) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\frac{1}{U^{1/i}} \leqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[U^{1/i} \geqslant \frac{1}{x}\right]\right) && \textit{(par stricte décroissance de } x \mapsto \frac{1}{x} \textit{ sur } ]0,+\infty[\textit{)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[U \geqslant \frac{1}{x^i}\right]\right) && \textit{(par stricte croissance de } x \mapsto x^i \textit{ sur } ]0,+\infty[\textit{)} \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\left[U < \frac{1}{x^i}\right]\right) \\
&= 1 - F_U\left(\frac{1}{x^i}\right) && \textit{(car } U \textit{ est à densité)} \\
&= 1 - \frac{1}{x^i} && \textit{(car } 0 < \frac{1}{x^i} < 1\textit{)}
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$F_{V_i}(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^i} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases} = F_i(x)$$

$\boxed{\text{La fonction de répartition caractérisant la loi, il suit que } V_i \text{ et } X_i \text{ suivent la même loi.}}$

□

***b)*** Écrire une fonction en langage **Python** nommée `simulX`, prenant en argument d'entrée l'entier $i$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire $X_i$.

*Démonstration.*
On propose la fonction **Python** suivante :

```
def simulX(i):
    U = rd.random()
    return 1 / U ** (1/i)
```

□

**Commentaire**

On met en œuvre dans cette question *4* la méthode d'inversion pour simuler des variables aléatoires à densité à partir de la loi uniforme à densité sur $]0,1[$.

## Partie II.

Soit $p$ un réel de $]0,1[$. On choisit un individu au hasard dans la population et on note $Y$ la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie socioprofessionnelle à laquelle cet individu appartient. On suppose que la variable aléatoire $Y-1$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1,p)$.

***5.*** En utilisant uniquement la fonction `random` du module `numpy.random`, écrire une fonction en langage **Python** nommée `simulY`, prenant en arguments d'entrée les paramètres $n$ et $p$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire $Y$.

*Démonstration.*
On propose la fonction **Python** suivante, qui commence par simuler la variable aléatoire $Y-1$, que l'on notera $W$ dans le code **Python** :

```
def simulY(n,p):
    W = 0
    for k in range(n-1):
        if rd.random() < p:
            W += 1
    return W + 1
```

$\square$

***6.*** Recopier et compléter la fonction, en langage **Python**, nommée `loiY`, prenant en arguments d'entrée les paramètres $n$ et $p$, et renvoyant une liste $(p_1, \ldots, p_n)$ où pour $i$ compris entre 1 et $n$, $p_i$ est une valeur approchée de $\mathbb{P}(Y=i)$.

```
def loiY(n,p):
    N = 10000
    loi = [0] * n
    for k in ------ :
        y = simulY(n,p)
        loi[--] --
    return loi
```

*Démonstration.*
On propose de compléter la fonction **Python** de la manière suivante :

```
def loiY(n,p):
    N = 10000
    loi = [0] * n
    for k in range(N) :
        y = simulY(n,p)
        loi[y-1] = loi[y-1] + 1/N
    return loi
```

D'après la loi faible des grands nombres, `loi[i-1]` contient la fréquence empirique de réalisation de l'événement $[Y=i]$, et donc une approximation de $\mathbb{P}([Y=i])$. $\square$

***7.*** Écrire une fonction **Python**, prenant en arguments d'entrée les paramètres $n$ et $p$, permettant d'afficher un diagramme en bâtons représentant approximativement la loi de $Y$. On représentera les valeurs de $Y$ en abscisses et les probabilités correspondantes en ordonnées. On pourra utiliser les fonctions définies dans les questions précédentes, et l'annexe fournie en fin de sujet.

*Démonstration.*
On propose la fonction **Python** suivante :

```
def diagrammeY(n,p):
    Xabs = [k for k in range(1,n+1)]
    Yord = loiY(n,p)
    plt.bar(Xabs, Yord)
    plt.show()
```

□

***8.*** Dans cette question, on suppose que chaque profession est identifiée de manière unique par un numéro appelé code PCS.

Par ailleurs, les différentes professions sont regroupées dans six grandes catégories socioprofessionnelles, que l'on identifie par un entier de 1 à 6.

On dispose d'une base de données comportant trois tables nommées `individu`, `departement` et `profession`, décrites ci-dessous.

- La table `individu` contient des informations sur tous les individus de la population active française. Chaque entrée correspond donc à un individu. La table comporte les attributs suivants.
  - ◇ `i_nom` (de type `TEXT`) : le nom de l'individu.
  - ◇ `i_prenom` (de type `TEXT`) : le prénom de l'individu.
  - ◇ `i_departement` (de type `INTEGER`) : le numéro de département où réside l'individu.
  - ◇ `i_insee` (de type `INTEGER`) : le numéro INSEE (ou numéro de sécurité sociale) de l'individu.
  - ◇ `i_code_profession` (de type `INTEGER`) : le code PCS identifiant la profession actuelle de l'individu.
- La table `departement` contient des informations sur les départements français. Chaque entrée correspond donc à un département. La table comporte les attributs suivants.
  - ◇ `d_numero` (de type `INTEGER`) : le numéro du département.
  - ◇ `d_nom` (de type `TEXT`) : le nom du département.
  - ◇ `d_population` (de type `INTEGER`) : le nombre d'habitants vivant dans le département.
- La table `profession` contient des informations sur toutes les professions recensées dans la base de données. Chaque entrée correspond donc à une profession différente. La table comporte les attributs suivants.
  - ◇ `p_pcs` (de type `INTEGER`) : le code PCS permettant d'identifier la profession.
  - ◇ `p_categorie` (de type `INTEGER`) : le numéro de la catégorie socioprofessionnelle (de 1 à 6) à laquelle la profession se trouve rattachée.
  - ◇ `p_intitule` (de type `TEXT`) : l'intitulé de la profession (par exemple, `chirurgien dentiste`).

***a)*** Que doit vérifier la clé primaire d'une table dans une base de données ?

*Démonstration.*
Une clé primaire identifie chaque enregistrement d'une table de manière unique. □

***b)*** Pour chacune des trois tables de la base de données de cet exemple, indiquer sans justification un attribut pouvant jouer le rôle de clé primaire.

*Démonstration.*
L'attribut `i_insee` peut jouer le rôle de clé primaire de la table `individu`.

L'attribut `d_numero` peut jouer le rôle de clé primaire de la table `departement`.

L'attribut `p_pcs` peut jouer le rôle de clé primaire de la table `profession`. □

*c)* Dresser un schéma relationnel de la base de données décrite ci-dessus, en mettant en évidence les relations qui existent entre les tables et les attributs permettant d'établir ces relations.
On s'assurera que chaque table est reliée à au moins l'une des deux autres tables.

*Démonstration.*
Dans le schéma relationnel suivant, on choisit de mettre en gras les clés primaires et de mettre en italique les clés étrangères :
`individu`(i_nom, i_prenom, *i_departement*, **i_insee**, *i_code_profession*)
`departement`(**d_numero**, d_nom, d_population)
`profession`(**p_pcs**, p_categorie, p_intitule)
L'attribut *i_departement* de la table `individu` est une clé étrangère pointant vers l'attribut **d_numero** de la table `departement`.
L'attribut *i_code_profession* de la table `individu` est une clé étrangère pointant vers l'attribut **p_pcs** de la table `profession`. □

*d)* Écrire une requête SQL renvoyant tous les codes PCS des professions exercées dans le département de l'Eure-et-Loir (numéro 28). Chaque code PCS ne pourra apparaître qu'une seule fois.
On pourra utiliser la commande `DISTINCT` décrite dans l'annexe fournie en fin de sujet.

*Démonstration.*
On propose le code SQL suivant :

```
SELECT DISTINCT i_code_profession
FROM individu
WHERE i_departement = 28
```

□

*e)* Écrire une requête SQL permettant d'obtenir le numéro de catégorie socioprofessionnelle (entre 1 et 6) de chaque individu.
La requête devra renvoyer deux attributs pour chaque individu : son numéro INSEE, et la catégorie socioprofessionnelle à laquelle est rattachée sa profession.

*Démonstration.*
On propose le code SQL suivant :

```
SELECT i_insee, p_categorie
FROM individu INNER JOIN profession
ON individu.i_code_profession = profession.p_pcs
```

□

## Partie III.

Soit $p$ un réel de $]0,1[$.
Un institut réalise un sondage selon le protocole suivant :

- On choisit une catégorie socioprofessionnelle de manière aléatoire (mais sans équiprobabilité), et on note $Y$ la variable aléatoire égale au numéro de la catégorie choisie.
  Comme dans la partie **II**, on suppose que $Y-1$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n-1,p)$.
- On sélectionne alors un individu au hasard (avec équiprobabilité) dans la catégorie socioprofessionnelle choisie à l'étape précédente, et on note $Z_n$ la variable aléatoire égale à son revenu mensuel, en milliers d'euros.

Enfin, on rappelle que, pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$, la fonction de répartition $F_i$ de la variable aléatoire $X_i$ est donnée par l'égalité (2) montrée à la question ***3***.
On note $G_n$ la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z_n$.

***9.*** Expliciter $G_n(x)$ pour tout réel $x$ strictement inférieur à 1.

*Démonstration.*
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $X_i(\Omega) = [1, +\infty[$ (autrement dit, tous les revenus mensuels sont supérieurs ou égaux à 1000 euros). On en déduit que $Z_n(\Omega) = [1, +\infty[$.

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x < 1,\ G_n(x) = 0.}$$

□

***10.*** Soit $x$ un réel supérieur ou égal à 1.

***a)*** Justifier que pour tout entier $i$ compris entre 1 et $n$ :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leqslant x) = F_i(x).$$

*Démonstration.*
Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Supposons l'événement $[Y = i]$ réalisé. Dans ce cas, on choisit au hasard (avec équiprobabilité) un individu dans la catégorie socioprofessionnelle numéro $i$. Son revenu mensuel est, par définition, $X_i$ mais également $Z_n$. On a alors :

$$\mathbb{P}_{[Y=i]}([Z_n \leqslant x]) = \mathbb{P}_{[Y=i]}([X_i \leqslant x]) = \mathbb{P}([X_i \leqslant x]) = F_i(x)$$

par indépendance de $X_i$ et $Y$.

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leqslant x) = F_i(x).}$$

□

***b)*** Montrer que :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}.$$

*Démonstration.*
D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([Y = i])_{i \in [\![1,n]\!]}$, on a :

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \mathbb{P}([Z_n \leqslant x]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y = i] \cap [Z_n \leqslant x]) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y = i]) \mathbb{P}_{[Y=i]}(Z_n \leqslant x) && \textit{(car, pour tout } i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}([Y = i]) \neq 0\textit{)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([Y = i]) F_i(x) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{10.b)}}\textit{)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y = k+1]) F_{k+1}(x) && \textit{(par décalage d'indice)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}([Y - 1 = k]) F_{k+1}(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} F_{k+1}(x) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} && \textit{(car } Y - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, p)\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } G_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+1}(x)\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}.}$$

□

***c)*** En déduire que :

$$G_n(x) = 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}.$$

*Démonstration.*
On continue le calcul précédent :

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \sum_{i=0}^{n-1} F_{k+1}(x)\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{x^{k+1}}\right)\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} && \textit{(d'après (2), car } x \geqslant 1\textit{)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} - \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{p^k(1-p)^{n-1-k}}{x^{k+1}} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k} - \frac{1}{x}\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\left(\frac{p}{x}\right)^k(1-p)^{n-1-k} \\
&= (p+(1-p))^{n-1} - \frac{1}{x}\left(\frac{p}{x}+(1-p)\right)^{n-1} && \textit{(par binôme de Newton)} \\
&= 1^{n-1} - \frac{1}{x}\left(\frac{p+x(1-p)}{x}\right)^{n-1} \\
&= 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, on a bien : } G_n(x) = 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n}.}$$

□

***11.*** Justifier que $Z_n$ est une variable aléatoire à densité.

*Démonstration.*
La fonction $G_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ car constante et sur $]1, +\infty[$ car elle y coïncide avec une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.
De plus :

$$\lim_{x\to 1^+} G_n(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 - \frac{(p+(1-p)x)^{n-1}}{x^n} = 1 - \frac{1^{n-1}}{1^n} = 0 = G_n(0) = \lim_{x\to 1^-} G_n(x)$$

donc $G_n$ est continue en 1.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi, } G_n \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ et de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en 1.} \\ \text{La variable aléatoire } Z_n \text{ est bien à densité.}\end{array}}$$

□

***12.*** En utilisant les fonctions `simulX` et `simulY` définies aux questions ***4.b)*** et ***5***, écrire une fonction en langage **Python** nommée `sondage`, prenant en arguments d'entrée les paramètres $n$ et $p$, et renvoyant une simulation de la variable aléatoire $Z_n$.

*Démonstration.*
On propose la fonction **Python** suivante :

```
def sondage(n,p):
    i = simulY(n,p)
    return simulX(i)
```

$\square$

***13.*** Dans cette question uniquement, on suppose que $p = \dfrac{1}{n}$.

***a)*** Montrer que, pour tout $x$ réel :

$$G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Si $x < 1$, alors $G_n(x) = 0$ (d'après la question ***9***).

× Si $x \geqslant 1$, alors :

$$\begin{aligned} G_n(x) &= 1 - \frac{\left(\dfrac{1}{n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x\right)^{n-1}}{x^n} \\ &= 1 - \frac{1}{x} \frac{\left(\dfrac{1}{n} + \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x\right)^{n-1}}{x^{n-1}} \\ &= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{nx} + 1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{nx} + 1 - \frac{x}{nx}\right)^{n-1} \\ &= 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : G_n(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x}\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right)^{n-1} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}}$$

$\square$

***b)*** Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} G_n(x)$.

*Démonstration.*
Soit $x \in \mathbb{R}$.

× Si $x \leqslant 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $G_n(x) = 0$ et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} G_n(x) = 0$$

× Si $x > 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$G_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right)^{n-1} = 1 - \frac{1}{x}\mathrm{e}^{(n-1)\ln\left(1-\frac{x-1}{nx}\right)}$$

Or, $\dfrac{x-1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\ln\left(1 - \dfrac{x-1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x-1}{nx}$ (on a bien $x - 1 \neq 0$). Il suit que :

$$(n-1)\ln\left(1 - \frac{x-1}{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -(n-1)\frac{x-1}{nx} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{x-1}{x} = \frac{1-x}{x}$$

Par continuité de l'exponentielle :

$$\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = 1 - \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1-x}{x}}$$

$$\boxed{\text{On a donc : } \lim_{n\to+\infty} G_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}\mathrm{e}^{\frac{1-x}{x}} & \text{si } x > 1, \\ 0 & \text{si } x \leqslant 1. \end{cases}}$$

**Commentaire**

On peut vérifier que $F_Z$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

□