

---

## DS5 (version B)

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidat·es sont invité·es à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

*Si au cours de l'épreuve, un candidat ou une candidate repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.*

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies suivantes sont importées sous leurs alias habituels :

- `import numpy as np`
- `import numpy.linalg as al`
- `import numpy.random as rd`
- `import matplotlib.pyplot as plt`

## Problème 1

### Partie I : Etude d'une matrice $A$

On considère la matrice carrée  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ .

1. a) On exécute le code **Python** suivant :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3 A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
4 print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

1	[[ 2 -2 2]
2	[ 1 1 2]
3	[-2 0 -3]]

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

b) En déduire les valeurs propres possibles de  $A$ .

2. a) Déterminer  $\text{Sp}(A)$  et une base de chacun des sous-espaces propres de  $A$ .

b) Démontrer qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  inversible, dont la première ligne est  $(2 \ 3 \ -2)$ , et une matrice  $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient  $A = PDP^{-1}$ . On explicitera les matrices  $P$  et  $D$ .

### Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si  $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$  désignent neuf suites convergentes, de limites respectives  $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ , et si  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite coefficient par coefficient, et on le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on pose, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Lorsque  $(S_n(M))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite coefficient par coefficient, on note  $e^M$  cette limite.

3. *Deux résultats théoriques.* On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

- a) Soit  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  et soit  $(\alpha_n)$  une suite réelle convergente, de limite  $\ell$ . Montrer que la suite de matrices  $(\alpha_n M)$  admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n M = \ell M$$

- b) Soient  $(M_n)$  et  $(M'_n)$  deux suites de matrices de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = M$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M'_n = M'$ . Montrer que les suites de matrices  $(M_n + M'_n)$  et  $(M_n M'_n)$  admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n + M'_n) = M + M' \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n M'_n) = M M'$$

*Les candidat-es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.*

4. Montrer que, si  $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ , alors  $e^D$  existe et vaut  $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$ .

*Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.*

5. Dans cette question uniquement, la matrice  $M$  est donnée par  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

- a) Calculer  $M^2$  et  $M^3$ . En déduire la matrice  $M^k$  pour tout entier naturel  $k$ .  
b) Donner, pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, l'expression de  $S_n(M)$ . En déduire l'existence et l'expression de la matrice  $e^M$ .

6. Dans cette question uniquement, la matrice  $M$  est donnée par  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- a) Calculer  $M^2$  et  $M^3$  en fonction de  $M$ .  
b) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Conjecturer une formule simple pour l'expression de  $M^k$  puis la démontrer par récurrence.  
c) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que :

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3} \left( \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M$$

- d) En déduire que  $e^M$  existe et que :

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

7. Dans cette question, on considère la matrice  $A$  de la Partie I et on réutilise les notations de la question 2.b). On fixe un réel  $t$ .

- a) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$S_n(tA) = P S_n(tD) P^{-1}$$

- b) Conclure que  $e^{tA}$  existe et en donner une expression sous la forme  $e^{tA} = P \Delta(t) P^{-1}$ .

On explicitera la matrice  $\Delta(t)$  sous forme de tableau matriciel en fonction de  $t$ .

*En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).*

### Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) &= 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) &= -2x(t) - 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues  $x, y, z$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ .

On a alors :

$$(S) \iff X' = AX$$

où  $A$  est la matrice étudiée dans la partie I.

8. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire  $(S)$ .

9. Soient  $X$  et  $Y$  deux solutions de  $(S)$ . On suppose qu'il existe un instant  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $X(t_0) = Y(t_0)$ . Que peut-on en déduire sur  $X$  et  $Y$  ?

10. Justifier que l'ensemble des solutions de  $(S)$  est :

$$\{t \mapsto \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{où } U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

11. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- a) i) Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy  $(\mathcal{P}_1)$ , que l'on notera  $X_1$ .  
ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution  $X_1$  est convergente. Expliciter le point limite  $(\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ . Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire  $(S)$  ?
- b) i) Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy  $(\mathcal{P}_2)$ , que l'on notera  $X_2$ .  
ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution  $X_2$  est divergente.
- c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire  $(S)$ . Dire quels sont les tracés associés aux solutions  $X_1$  et  $X_2$  étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

12. Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

a) On fixe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$  et on considère la solution de  $(S)$  :

$$X : t \mapsto \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1$$

On pose  $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$  (où  $P$  est définie à la question 2.b)).

Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X(t) = e^{tA}C$ .

b) Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

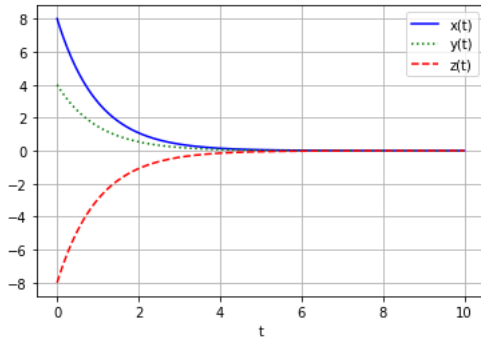


FIG. 1 Tracé 1

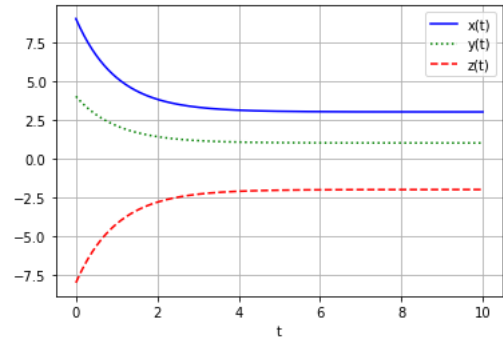


FIG. 2 Tracé 2

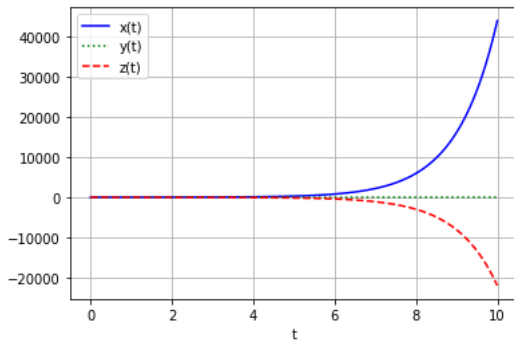


FIG. 3 Tracé 3

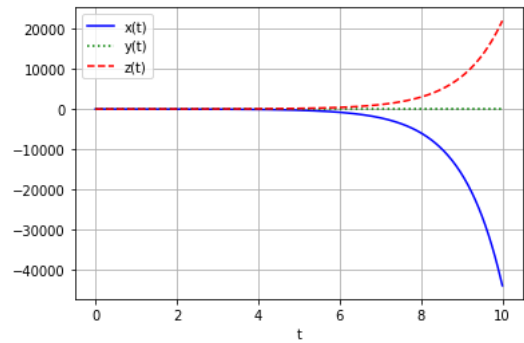


FIG. 4 Tracé 4

## Problème 2 - Une propriété limite des lois de Pareto

### Question préliminaire

Soit  $g$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ , à valeurs réelles.

1. a) Montrer que pour tout  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $I$  tels que  $\alpha < \beta$  :

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = \int_0^1 g(\alpha + (\beta - \alpha)x) dx$$

b) Soit  $a, b, c, d$  dans  $I$  tels que  $a < c < d < b$ .

On suppose  $g$  décroissante sur  $I$ , établir l'encadrement :

$$\frac{1}{b - c} \int_c^b g(t) dt \leq \frac{1}{d - c} \int_c^d g(t) dt \leq \frac{1}{d - a} \int_a^d g(t) dt$$

### Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

• Pour tout réel  $x$  positif ou nul :

- on note  $[x]$  la *partie entière* de  $x$ . On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier naturel  $n$  qui vérifie l'encadrement :  $n \leq x < n + 1$ .
- on note  $\{x\} = x - [x]$ , que l'on appelle la *partie fractionnaire* de  $x$ .

Par exemple, si  $x = 12,34$ , alors  $[x] = 12$  et  $\{x\} = 0,34$ .

- Dans cette partie,  $X$  désigne une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité  $f$  qui vérifie les propriétés :
  - $f$  est nulle sur  $] -\infty, 0[$  ;
  - la restriction de  $f$  à  $[0, +\infty[$  est continue et décroissante.

On pose  $M = f(0)$ , c'est le maximum de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $Y = \{X\} = X - [X]$ , la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de  $X$ .

On note  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$ .

2. Que vaut  $F_Y(y)$  lorsque  $y < 0$  ? Que vaut  $F_Y(y)$  lorsque  $y \geq 1$  ?  
On justifiera les réponses.

3. Justifier l'égalité entre événements :  $[Y = 0] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X = n]$ .  
En déduire :  $F_Y(0) = 0$ .

4. Soit  $y$  un réel de l'intervalle  $]0, 1[$ .

a) Montrer l'égalité :  $F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t) dt$ .

- b) Montrer, en utilisant la question préliminaire, les inégalités :

– Pour tout  $n$  entier naturel :  $\int_n^{n+y} f(t) dt \geq y \int_n^{n+1} f(t) dt$ .

– Pour tout  $n$  entier naturel non nul :  $\int_n^{n+y} f(t) dt \leq y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t) dt$ .

c) En déduire :  $y \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq F_Y(y) \leq \int_0^y f(t) dt + y \int_y^{+\infty} f(t) dt$ , puis l'encadrement :

$$y \leq F_Y(y) \leq y + M$$

## Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel  $\lambda$  strictement positif, on définit la fonction  $g_\lambda$  sur  $\mathbb{R}$  par  $g_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

5. Montrer que pour tout réel  $\lambda$  strictement positif,  $g_\lambda$  est une densité de probabilité sur  $\mathbb{R}$  (loi dite de Pareto).

Dans toute la suite, on note  $Z_\lambda$  une variable aléatoire admettant  $g_\lambda$  pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition  $G_\lambda$  de  $Z_\lambda$ .

7. On note  $\ln$  la fonction *logarithme népérien*, et  $\log$  la fonction *logarithme décimal*.

Cette fonction est définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$  pour tout réel  $x$  strictement positif.

On pose  $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$ , et on note  $F_\lambda$  la fonction de répartition de  $X_\lambda$ .

a) Établir, pour tout réel  $x$ , l'égalité :  $F_\lambda(x) = G_\lambda(10^x)$ .

- b) En déduire que  $X_\lambda$  suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre en fonction de  $\lambda$ .

8. a) On pose  $Y_\lambda = \{X_\lambda\}$ , la partie fractionnaire de  $X_\lambda$ .

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour tout réel  $y$  de l'intervalle  $]0, 1[$  :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{P}([Y_\lambda \leq y]) = y$$

b) (CUBES UNIQUEMENT) En déduire que, lorsque  $\lambda$  tend vers 0,  $Y_\lambda$  converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

9. Pour tout réel  $x$  supérieur ou égal à 1, on note  $\alpha(x)$  le premier chiffre dans l'écriture décimale de  $x$ . C'est un entier de l'intervalle  $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ .

Par exemple,  $\alpha(50) = 5$  et  $\alpha(213, 43) = 2$ .

a) Pour tout  $k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$ , montrer l'équivalence :

$$\alpha(x) = k \Leftrightarrow \{\log(x)\} \in [\log(k), \log(k+1)[$$

b) On note  $C_\lambda = \alpha(Z_\lambda)$  la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de  $Z_\lambda$ .

Montrer, pour tout  $k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$  :  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{P}([C_\lambda = k]) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$ .

Cette loi limite obtenue pour le premier chiffre de  $Z_\lambda$  est appelée *loi de Benford*.