
DS5 barème (version A)

Problème 1 (sujet maison)

Partie I : Etude d'une matrice A

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. a) On exécute le code **Python** suivant :

```
1 import numpy as np
2 import numpy.linalg as al
3 A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
4 print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

1	[[2 -2 2]
2	[1 1 2]
3	[-2 0 -3]]

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

• **1 pt** : $A^3 = A$

b) En déduire les valeurs propres possibles de A .

• **1 pt** : $P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de A

• **1 pt** : $\text{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P(X)\}$

• **1 pt** : les valeurs propres possibles de A sont -1 , 0 et 1

2. a) Déterminer $\text{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A .

• **2 pts** : $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

• **1 pt** : $E_{-1}(A) \neq \{0\}_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ donc -1 est valeur propre de A

• **1 pt** : $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_{-1}(A)$

• **1 pt** : $E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$

• **1 pt** : $E_1(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $(2 \ 3 \ -2)$, et une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D .

• **1 pt** : La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable

- 1 pt : $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- 1 pt : Par la formule de changement de base, on a bien $A = PDP^{-1}$
ou P est obtenue par concaténation des bases des sous-espaces propres

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, et on le note

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n ,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} M^k \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Lorsque $(S_n(M))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

3. Deux résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

- a) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ . Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n M = \ell M$$

- 2 pts : calcul correct

- b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = M$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n + M'_n) = M + M' \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (M_n M'_n) = M M'$$

- 1 pt : calcul correct pour la somme
- 2 pts : calcul correct pour le produit

Les candidat-es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

4. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.

Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

- 1 pt : $D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$

• 1 pt : $S_n(D) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix}$

- 1 pt : reconnaissance des sommes partielles de séries exponentielles

5. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 . En déduire la matrice M^k pour tout entier naturel k .

• 1 pt : $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

• 1 pt : $M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 1 pt : synthèse

b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M .

• 2 pts : $S_n(M) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

• 1 pt : e^M existe et $e^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 en fonction de M .

• 1 pt : $M^2 = 3M$

• 1 pt : $M^3 = 3^2 M$

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de M^k puis la démontrer par récurrence.

• 1 pt : conjecture, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $M^k = 3^{k-1} M$

• 1 pt : initialisation

• 1 pt : hérédité

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M$$

• 2 pts : calcul

d) En déduire que e^M existe et que :

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M$$

- 1 pt : $\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} (e^3 - 1)$
- 1 pt : d'après la question 3.a), $\frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^3 - 1}{3} M$
- 1 pt : d'après la question 3.b), $S_n(M) = I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \frac{3^k}{k!} - 1 \right) M \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I + \frac{e^3 - 1}{3} M$

7. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie I et on réutilise les notations de la question 2.b). On fixe un réel t .

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$$

- 1 pt : $A = PDP^{-1}$. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$
- 1 pt : $S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1}$

b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $e^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t .

- 1 pt : D'après la question 4, la matrice e^{tD} existe et vaut

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

- 1 pt : D'après la question 3.b) et la question précédente, on a alors

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} Pe^{tD}P^{-1}$$

- 1 pt : e^{tA} existe et $e^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ avec

$$\Delta(t) = e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \begin{cases} x'(t) &= & 2x(t) &-& 2y(t) &+& 2z(t) \\ y'(t) &= & x(t) &+& y(t) &+& 2z(t) \\ z'(t) &= & -2x(t) && &-& 3z(t) \end{cases}$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$(S) \iff X' = AX$$

où A est la matrice étudiée dans la partie I.

8. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

- 1 pt : (u, v, w) est un état d'équilibre de $(S) \iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A)$

- 1 pt : l'ensemble des états d'équilibre de (S) est

$$\text{Vect}((3, 1, -2)) = \{\lambda(3, 1, -2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

9. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S) . On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

- 1 pt : X et Y sont solutions du même problème de Cauchy
- 1 pt : tout problème de Cauchy admet une unique solution donc $X = Y$

10. Justifier que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\{t \mapsto \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3\}$$

$$\text{où } U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 1 pt : La matrice A est diagonalisable (cf question 2.b))
- 1 pt : on a montré à la question 2.a) que (U_{-1}, U_0, U_1) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A

11. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) i) Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy (\mathcal{P}_1) , que l'on notera X_1 .

$$\bullet \text{ 1 pt : écriture correcte du système } \begin{cases} 2\alpha & + 3\beta & - 2\gamma = 9 \\ \alpha & + \beta & = 4 \\ -2\alpha & - 2\beta & + \gamma = -8 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ 1 pt : } \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha & & = 3 \\ & \beta & = 1 \\ & & \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ 1 pt : } X_1(t) = 3e^{-t}U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) . Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

$$\bullet \text{ 1 pt : } x_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 3, y_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1 \text{ et } z_1(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} -2. \text{ Ainsi la trajectoire associée à la solution } X_1 \text{ est convergente, de point limite } (\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$$

$$\bullet \text{ 1 pt : d'après la question 9, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel } (S)$$

b) i) Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy (\mathcal{P}_2) , que l'on notera X_2 .

- 1 pt : écriture correcte du système
$$\begin{cases} 2\alpha & + 3\beta & - 2\gamma = 3 \\ \alpha & + \beta & = 2 \\ -2\alpha & - 2\beta & + \gamma = -3 \end{cases}$$
- 1 pt : $\alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \alpha & & = 1 \\ & \beta & = 1 \\ & & \gamma = 1 \end{cases}$
- 1 pt : $X_2(t) = e^{-t}U_{-1} + U_0 + e^tU_1 = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}$

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

- 1 pt : $z_2(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. La trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

- 1 pt : La figure 4 est la seule où l'on a $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution X_2 .
- 2 pts : Dans la figure 3, on a $z(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution X_1 .
Dans la figure 1, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = 0$. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution X_1 donc cette figure ne correspond pas à X_1 .
Par élimination, la figure 2 correspond à la solution X_1 . De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que $x_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 3$, $y_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ et $z_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -2$.

12. Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

a) On fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et on considère la solution de (S) :

$$X : t \mapsto \alpha e^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^tU_1$$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (où P est définie à la question 2.b)).

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = e^{tA}C$.

- 2 pts : calcul correct

b) Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

- 1 pt : la formule obtenue est analogue

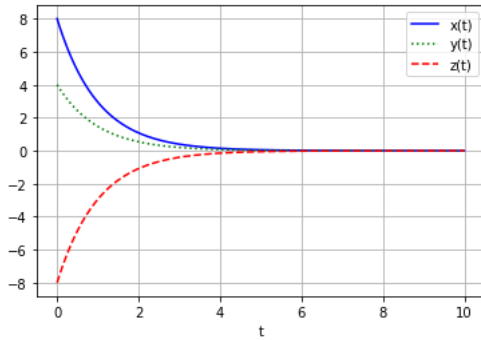


FIG. 1 Tracé 1

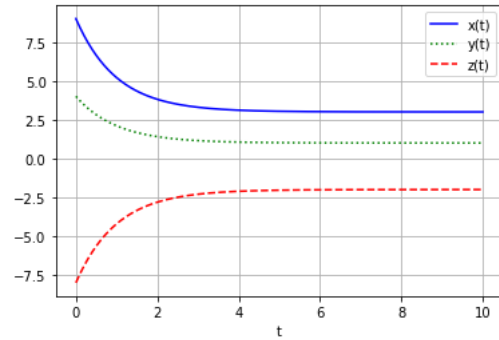


FIG. 2 Tracé 2

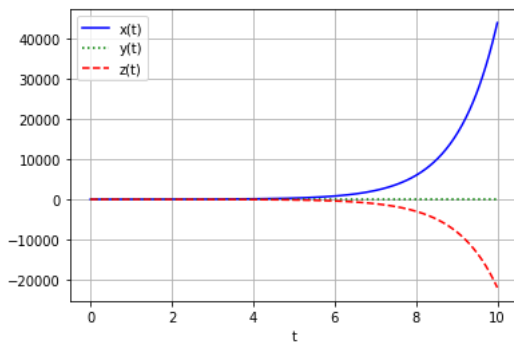


FIG. 3 Tracé 3

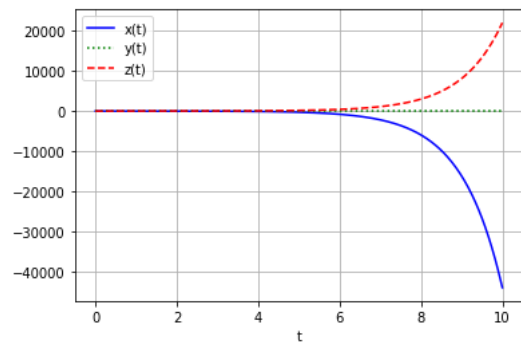


FIG. 4 Tracé 4

Problème 2 - Une propriété limite des lois de Pareto (ESSEC I 2011)

Question préliminaire

Soit g une fonction continue sur un intervalle I , à valeurs réelles.

1. a) Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$:

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = \int_0^1 g(\alpha + (\beta - \alpha)x) dx$$

• 1 pt : g est continue sur l'intervalle I donc l'intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt$ est bien définie

• 1 pt : On effectue le changement de variable $x = \frac{1}{\beta - \alpha} t - \frac{\alpha}{\beta - \alpha}$

• 1 pt : Ce changement de variable est valide car $\psi : x \mapsto (\beta - \alpha)x + \alpha$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$

b) Soit a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$.

On suppose g décroissante sur I , établir l'encadrement :

$$\frac{1}{b - c} \int_c^b g(t) dt \leq \frac{1}{d - c} \int_c^d g(t) dt \leq \frac{1}{d - a} \int_a^d g(t) dt$$

• 1 pt : mise sous forme normale en vérifiant les hypothèses de la question 1

• 1 pt : $\forall x \in [0, 1], g(c + (d - c)x) \geq g(c + (b - c)x)$

• 1 pt : D'après ce qui précède, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) : $\int_0^1 g(c + (d - c)x) dx \geq \int_0^1 g(c + (b - c)x) dx$

- **1 pt** : $\forall x \in [0, 1], g(a + (d - a)x) \geq g(c + (d - c)x)$
- **1 pt** : D'après ce qui précède, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leq 1$) : $\int_0^1 g(a + (d - a)x) dx \geq \int_0^1 g(c + (d - c)x) dx$

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

- Pour tout réel x positif ou nul :
 - on note $[x]$ la *partie entière* de x . On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier naturel n qui vérifie l'encadrement : $n \leq x < n + 1$.
 - on note $\{x\} = x - [x]$, que l'on appelle la *partie fractionnaire* de x .
 Par exemple, si $x = 12,34$, alors $[x] = 12$ et $\{x\} = 0,34$.
- Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité f qui vérifie les propriétés :
 - f est nulle sur $] -\infty, 0[$;
 - la restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et décroissante.
 On pose $M = f(0)$, c'est le maximum de f sur \mathbb{R} .

Soit $Y = \{X\} = X - [X]$, la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de X .

On note F_Y la fonction de répartition de Y .

2. Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y < 0$? Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y \geq 1$?
On justifiera les réponses.

- **1 pt** : $Y(\Omega) \subset [0, 1[$
- **1 pt** : si $y \in] -\infty, 0[$, alors : $[Y \leq y] = \emptyset$ et donc $F_Y(y) = 0$
- **1 pt** : si $y \in [1, +\infty[$, alors : $[Y \leq y] = \Omega$ et donc $F_Y(y) = 1$

3. Justifier l'égalité entre événements : $[Y = 0] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X = n]$.

En déduire : $F_Y(0) = 0$.

- **1 pt** : $[Y = 0] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [X = n]$
- **1 pt** : $[Y \leq 0] = [Y = 0]$
- **1 pt** : les événements de la famille $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles
- **1 pt** : conclusion avec l'additivité de l'application probabilité et le fait que X est à densité

4. Soit y un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

a) Montrer l'égalité : $F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t) dt$.

- **1 pt** : La famille $([T = n])_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, où $T = [X]$
- **1 pt** : par la formule des probabilités totales : $F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([T = n] \cap [X - T \leq y])$
- **1 pt** : f est une densité de X donc $[n \leq X \leq n + y] = \int_n^{n+y} f(t) dt$
- **1 pt** : $F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t) dt$ sans arnaque

b) Montrer, en utilisant la question préliminaire, les inégalités :

- Pour tout n entier naturel : $\int_n^{n+y} f(t) dt \geq y \int_n^{n+1} f(t) dt$.
 - 1 pt : vérification des hypothèses pour utiliser la question préliminaire
 - 1 pt : calculs corrects ($c = n$, $d = n + y$ et $b = n + 1$)
- Pour tout n entier naturel non nul : $\int_n^{n+y} f(t) dt \leq y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t) dt$.
 - 1 pt : vérification des hypothèses pour utiliser la question préliminaire
 - 1 pt : calculs corrects ($a = n - 1 + y$ et $c = n$ et $d = n + y$)

c) En déduire : $y \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq F_Y(y) \leq \int_0^y f(t) dt + y \int_y^{+\infty} f(t) dt$, puis l'encadrement :

$$y \leq F_Y(y) \leq y + M$$

- 1 pt : $\sum_{n=0}^m \int_n^{n+y} f(t) dt \geq y \int_0^{m+1} f(t) dt$
- 1 pt : les deux termes admettent une limite quand m tend vers $+\infty$
- 1 pt : par passage à la limite : $y \int_0^{+\infty} f(t) dt \leq F_Y(y)$
- 1 pt : $\sum_{n=0}^m \int_n^{n+y} f(t) dt - \int_0^y f(t) dt \leq y \int_y^{m+y} f(t) dt$
- 1 pt : par passage à la limite dans l'inégalité : $F_Y(y) \leq \int_0^y f(t) dt + y \int_y^{+\infty} f(t) dt$
- 1 pt : $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1$
- 1 pt : $y \int_y^{+\infty} f(t) dt \leq y$
- 2 pt : $\int_0^y f(t) dt \leq M$

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel λ strictement positif, on définit la fonction g_λ sur \mathbb{R} par $g_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

5. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, g_λ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} (loi dite de Pareto).

- 1 pt : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g_\lambda(x) \geq 0$
- 1 pt : g_λ est continue sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$
- 1 pt : $\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t) dt = \int_1^{+\infty} g_\lambda(t) dt$ car g est nulle en dehors de $[1, +\infty[$
- 1 pt : $\int_1^{+\infty} g_\lambda(t) dt = 1$ ($\lambda > 0$ donc $\lambda + 1 > 1$)

Dans toute la suite, on note Z_λ une variable aléatoire admettant g_λ pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition G_λ de Z_λ .

- **1 pt** : pour tout $x < 1$, $G_\lambda(x) = 0$
- **1 pt** : pour tout $x \geq 1$, $G_\lambda(x) = 1 - \frac{1}{x^\lambda}$

7. On note \ln la fonction *logarithme népérien*, et \log la fonction *logarithme décimal*.

Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel x strictement positif.

On pose $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$, et on note F_λ la fonction de répartition de X_λ .

a) Établir, pour tout réel x , l'égalité : $F_\lambda(x) = G_\lambda(10^x)$.

- **1 pt** : $\ln(10) > 0$
- **1 pt** : $x \ln(10) = \ln(10^x)$
- **1 pt** : la fonction \exp est strictement croissante sur \mathbb{R}

b) En déduire que X_λ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre en fonction de λ .

- **1 pt** : $10^x < 1 \iff x < 0$
- **1 pt** : pour tout $x > 0$, $F_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda \ln(10)x}$
- **1 pt** : X_λ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda \ln(10)$

8. a) On pose $Y_\lambda = \{X_\lambda\}$, la partie fractionnaire de X_λ .

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour tout réel y de l'intervalle $]0, 1[$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{P}([Y_\lambda \leq y]) = y$$

- **1 pt** : la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda \ln(10) e^{-\lambda \ln(10)x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

est une densité de X_λ et vérifie les hypothèses de la partie I

- **1 pt** : pour $y \in]0, 1[$, on a $y \leq F_{Y_\lambda}(y) \leq y + M_\lambda$ où $M_\lambda = \lambda \ln(10)$ (maximum de f_λ sur \mathbb{R})
- **1 pt** : pour $y \in]0, 1[$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{P}([Y_\lambda \leq y]) = y$ par théorème d'encadrement

b) (CUBES UNIQUEMENT) En déduire que, lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

- **1 pt** : pour $y \geq 1$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{P}([Y_\lambda \leq y]) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 1 = 1$
pour $y \leq 0$, $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{P}([Y_\lambda \leq y]) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 0 = 0$

9. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on note $\alpha(x)$ le premier chiffre dans l'écriture décimale de x . C'est un entier de l'intervalle $\llbracket 1, 9 \rrbracket$.

Par exemple, $\alpha(50) = 5$ et $\alpha(213,43) = 2$.

a) Pour tout $k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$, montrer l'équivalence :

$$\alpha(x) = k \iff \{\log(x)\} \in [\log(k), \log(k+1)[$$

- **1 pt** : écriture de x sous la forme $x = \alpha(x)10^d + r(x)$ avec $r(x) < 10^d$ et $d \in \mathbb{N}$
- **2 pt** : $d = \lfloor \log(x) \rfloor$
- **1 pt** : $\lceil 10^{\{\log(x)\}} \rceil = \alpha(x)$

- **1 pt** : $\{\log(x)\} \in [\log(k), \log(k+1)[\iff k = \lfloor 10^{\{\log(x)\}} \rfloor$

b) On note $C_\lambda = \alpha(Z_\lambda)$ la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de Z_λ .

Montrer, pour tout $k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$: $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(C_\lambda = k) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.

Cette loi limite obtenue pour le premier chiffre de Z_λ est appelée *loi de Benford*.

- **1 pt** : $[C_\lambda = k] = [\log(k) \leq Y_\lambda < \log(k+1)]$
- **1 pt** : par convergence en loi : $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathbb{P}(C_\lambda = k) = \mathbb{P}([\log(k) \leq U < \log(k+1)])$ où U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$
- **1 pt** : $\mathbb{P}([\log(k) \leq U < \log(k+1)]) = \log(k+1) - \log(k) = \log(1 + \frac{1}{k})$ car $\log(k) \in [0, 1]$ et $\log(k+1) \in [0, 1]$