DS5 correction (version B)

Problème 1 (sujet maison)

Partie I : Etude d'une matrice A

On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. ***a)*** On exécute le code **Python** suivant :

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
A = np.array([[2,-2,2],[1,1,2],[-2,0,-3]])
print(al.matrix_power(A,3))
```

et on obtient l'affichage :

```
[[ 2 -2  2]
[ 1  1  2]
[-2  0 -3]]
```

Traduire ce résultat par une égalité entre deux matrices.

Démonstration. D'après l'affichage **Python** : $\boxed{A^3 = A}$. □

b) En déduire les valeurs propres possibles de A.

Démonstration. D'après la question précédente, le polynôme $P(X) = X^3 - X$ est un polynôme annulateur de A. Or,

$$P(X) = X(X^2 - 1) = X(X - 1)(X + 1)$$

On en déduit que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{\text{racines de } P(X)\} = \{-1, 0, 1\}$$

Ainsi, $\boxed{\text{les valeurs propres possibles de } A \text{ sont } -1,\ 0 \text{ et } 1}$. □

2. a) Déterminer $\text{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

Démonstration. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- $$\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) &\iff (A+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ -2x & & & - & 2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 0 \end{array} \right. \quad L_3 \longleftarrow -\frac{1}{2} L_3 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 8y & + & 4z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} L_3 \longleftarrow 3L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow 3L_3 - L_1 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 2y & + & 2z & = & 0 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & - & 2y & = & -2z \\ & & 2y & = & -z \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x & & & = & -3z \\ & & 2y & = & -z \end{array} \right. \quad L_1 \longleftarrow L_1 + L_2 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & & & = & -z \\ & & y & = & -\frac{1}{2} z \end{array} \right.
\end{aligned}$$

  On en déduit que

  $$\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2} z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ -\frac{1}{2} z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

  $E_{-1}(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc -1 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

  — engendre $E_{-1}(A)$

  — est libre car constituée d'un unique vecteur non nul donc $\boxed{\mathcal{F}_{-1} \text{ est une base de } E_{-1}(A)}$.

•

$$\begin{aligned}
U \in E_0(A) &\iff AU = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ -2x - 3z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 & L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ -2y - z = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y + z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x - y = -z \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 2x = -3z & L_1 \longleftarrow 2L_1 + L_2 \\ 2y = -z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_0(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -\frac{3}{2}z \quad \text{et} \quad y = -\frac{1}{2}z \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}z \\ -\frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_0(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 0 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_0 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$:

— engendre $E_0(A)$

— est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

donc $\boxed{\mathcal{F}_0 \text{ est une base de } E_0(A)}$.

- $$\begin{aligned} U \in E_1(A) &\iff (A-I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & - & 2y & + 2z & = 0 \\ x & & & + 2z & = 0 \\ -2x & & & - 4z & = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ x \qquad + 2z = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ \qquad 2y \qquad = 0 \end{array} \right. \quad L_3 \longleftarrow L_3 - L_1 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x \quad = -2z \\ \quad y = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

  On en déduit que

  $$\begin{aligned} E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -2z \quad \text{et} \quad y = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

  $E_1(A) \neq \{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\}$ donc 1 est valeur propre de A. De plus, la famille $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

  — engendre $E_1(A)$

  — est libre car constituée d'un unique vecteur non nul

  donc $\boxed{\mathcal{F}_1 \text{ est une base de } E_1(A)}$.

Les valeurs propres possibles de A sont $-1, 0, 1$ et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de A. Donc

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 1\}}$$

□

b) Démontrer qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$. On explicitera les matrices P et D.

Démonstration. La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe

- une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de A

- une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A

telles que $A = PDP^{-1}$.

On pose alors $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Par la formule de changement de base, on a bien $A = PDP^{-1}$. $\square$

Partie II : Exponentielle d'une matrice carrée

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet une limite coefficient par coefficient*, et on le note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad M_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Si $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n,

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Lorsque $(S_n(M))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

3. Deux résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

a) Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n M = \ell M$$

Démonstration. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \alpha_n M &= \alpha_n \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_n a & \alpha_n b & \alpha_n c \\ \alpha_n d & \alpha_n e & \alpha_n f \\ \alpha_n g & \alpha_n h & \alpha_n i \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \ell a & \ell b & \ell c \\ \ell d & \ell e & \ell f \\ \ell g & \ell h & \ell i \end{pmatrix} = \ell \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \ell M \end{aligned}$$

$\square$

b) Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n = M$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que

$$\lim_{n\to+\infty} (M_n + M'_n) = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} (M_n M'_n) = MM'$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $$\begin{aligned} M_n + M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n + a'_n & b_n + b'_n & c_n + c'_n \\ d_n + d'_n & e_n + e'_n & f_n + f'_n \\ g_n + g'_n & h_n + h'_n & i_n + i'_n \end{pmatrix} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a + a' & b + b' & c + c' \\ d + d' & e + e' & f + f' \\ g + g' & h + h' & i + i' \end{pmatrix} = M + M' \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} M_n M'_n &= \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_n & b'_n & c'_n \\ d'_n & e'_n & f'_n \\ g'_n & h'_n & i'_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_n a'_n + b_n d'_n + c_n g'_n & a_n b'_n + b_n e'_n + c_n h'_n & a_n c'_n + b_n f'_n + c_n i'_n \\ d_n a'_n + e_n d'_n + f_n g'_n & d_n b'_n + e_n e'_n + f_n h'_n & d_n c'_n + e_n f'_n + f_n i'_n \\ g_n a'_n + h_n d'_n + i_n g'_n & g_n b'_n + h_n e'_n + i_n h'_n & g_n c'_n + h_n f'_n + i_n i'_n \end{pmatrix} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} aa' + bd' + cg' & ab' + be' + ch' & ac' + bf' + ci' \\ da' + ed' + fg' & db' + ee' + fh' & dc' + ef' + fi' \\ ga' + hd' + ig' & gb' + he' + ih' & gc' + hf' + ii' \end{pmatrix} = MM' \end{aligned}$$

□

Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

4. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, alors e^D existe et vaut $\mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}$.
Ainsi, on a montré que l'exponentielle d'une matrice diagonale est une matrice diagonale.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. La matrice D étant diagonale, on a

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
S_n(D) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} a^k & 0 & 0 \\ 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} b^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} c^k \end{pmatrix} \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

en reconnaissant des sommes partielles de séries exponentielles. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{e}^D \text{ existe et } \mathrm{e}^D = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^b & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^c \end{pmatrix}}$$

□

5. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3. En déduire la matrice M^k pour tout entier naturel k.

Démonstration. On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $k \geqslant 3$, $M^k = M^3 M^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} M^{k-3} = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$. Finalement,

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N},\ M^k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } k = 0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{si } k = 2 \\ 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} & \text{si } k \geqslant 3 \end{cases}}$$

□

b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} M^k + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k!} M^k && \text{par Chasles, car } n \geqslant 2 \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} M^k && \text{car } M^k = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \text{ si } k \geqslant 3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(S_n(M))$ est constante à partir du rang 2. On en déduit que

$$S_n(M) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\boxed{\mathrm{e}^M \text{ existe et } \mathrm{e}^M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

□

6. Dans cette question uniquement, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculer M^2 et M^3 en fonction de M.

Démonstration. On a

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3M$$

et

$$M^3 = M^2M = (3M)M = 3M^2 = 3(3M) = 3^2M$$

□

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Conjecturer une formule simple pour l'expression de M^k puis la démontrer par récurrence.

Démonstration. D'après la question précédente, on conjecture que $M^k = 3^{k-1}M$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $M^k = 3^{k-1}M$ ».
Initialisation :
D'une part, $M^1 = M$. D'autre part, $3^{1-1}M = 3^0M = M$. D'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité :
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} M^{k+1} &= MM^k \\ &= M(3^{k-1}M) && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 3^{k-1}M^2 \\ &= 3^{k-1}(3M) && \text{cf la question } \textbf{\textit{6.a)}} \\ &= 3^kM \end{aligned}$$

D'où $\mathcal{P}(k+1)$.
Par principe de récurrence, on a montré que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ M^k = 3^{k-1}M}$. □

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} S_n(M) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}M^k \\ &= M^0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}M^k && \text{par Chasles, car } n \geqslant 1 \\ &= I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}3^{k-1}M \\ &= I + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}3^kM \\ &= I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!}\right) M \\ &= \boxed{I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M} \end{aligned}$$

Vérifions que cette égalité est valable pour $n = 0$.

- D'une part, $S_0(M) = \sum\limits_{k=0}^{0} \frac{1}{k!} M^k = \frac{1}{0!} M^0 = I$
- D'autre part, $I + \frac{1}{3}\left(\sum\limits_{k=0}^{0} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M = I + \frac{1}{3}(1-1) M = I$

D'où l'égalité pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. □

d) En déduire que e^M existe et que :

$$\mathrm{e}^M = I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

Démonstration. On reconnaît une somme partielle de série exponentielle, d'où

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(\mathrm{e}^3 - 1\right)$$

D'après la question ***3.a)***,

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

puis, d'après la question ***3.b)***,

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} I + \frac{\mathrm{e}^3 - 1}{3} M$$

Donc

$$\boxed{\mathrm{e}^M \text{ existe et } \mathrm{e}^M = I + \tfrac{\mathrm{e}^3-1}{3} M.}$$

□

7. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie I et on réutilise les notations de la question ***2.b)***. On fixe un réel t.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n(tA) = P S_n(tD) P^{-1}$$

Démonstration. D'après la question ***2.b)***, $A = PDP^{-1}$. On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PD^kP^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n(tA) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(tA)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} PD^kP^{-1} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} D^k\right) P^{-1} \\
&= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (tD)^k\right) P^{-1} \\
&= PS_n(tD)P^{-1}
\end{aligned}$$

□

b) Conclure que e^{tA} existe et en donner une expression sous la forme $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$.
On explicitera la matrice $\Delta(t)$ sous forme de tableau matriciel en fonction de t.

Démonstration. On remarque que la matrice tD est diagonale et, plus précisément,

$$tD = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

D'après la question ***4***, la matrice e^{tD} existe et vaut

$$\mathrm{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

Ceci veut exactement dire que

$$S_n(tD) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix} \tag{1}$$

D'après la question ***3.b)*** et la question précédente, on a alors

$$S_n(tA) = PS_n(tD)P^{-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}$$

On en déduit que e^{tA} existe et $\mathrm{e}^{tA} = P\Delta(t)P^{-1}$ avec

$$\Delta(t) = \mathrm{e}^{tD} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}$$

□

En généralisant ce résultat, on montre alors que l'exponentielle d'une matrice diagonalisable est une matrice diagonalisable (on ne demande pas de le faire).

Partie III : Etude d'un système différentiel linéaire

On considère le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x'(t) & = & 2x(t) & - & 2y(t) & + & 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) & + & y(t) & + & 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) & & & - & 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$(S) \iff X' = AX$$

où A est la matrice étudiée dans la partie I.

8. Déterminer l'ensemble des états d'équilibre du système différentiel linéaire (S).

Démonstration. Soit $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
(u,v,w) \text{ est un état d'équilibre de } (S) &\iff A\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in E_0(A) \\
&\iff \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{cf question } \textbf{\textit{2.a)}}
\end{aligned}$$

On en déduit que l'ensemble des états d'équilibre de (S) est

$$\operatorname{Vect}((3,1,-2)) = \{\lambda(3,1,-2) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

☐

9. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et soient X et Y deux solutions de (S). On suppose que $X(t_0) = Y(t_0)$. Que peut-on en déduire sur X et Y ?

Démonstration. Notons $W = X(t_0) = Y(t_0)$. Sous ces hypothèses, X et Y sont deux solutions du même problème de Cauchy :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} Z'(t) = AZ(t) \\ Z(t_0) = W \end{cases} , \qquad \text{d'inconnue } Z$$

Or, tout problème de Cauchy admet une unique solution. On en déduit que $X = Y$, *i.e.* pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = Y(t)$. ☐

10. Justifier que l'ensemble des solutions de (S) est :

$$\left\{t \mapsto \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \mid (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

où $U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration. La matrice A est diagonalisable (cf question ***2.b)***) et on a montré à la question ***2.a)*** que (U_{-1}, U_0, U_1) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. D'après le cours, les solutions de (S) sont toutes de la forme

$$\begin{aligned} X(t) &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta e^{0t} U_0 + \gamma e^t U_1 \\ &= \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1 \end{aligned}$$

où $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$. ☐

11. On considère dans cette question deux problèmes de Cauchy :

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) : \begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$, que l'on notera X_1.

Démonstration. On considère une solution X quelconque de (S) :

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^{t} U_1$$

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_1) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 9 \\ \alpha & +\ \beta & & = 4 \\ -2\alpha & -2\beta & +\ \gamma & = -8 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrll} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 9 & \\ & -\ \beta & +2\gamma & = -1 & L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ & \beta & -\ \gamma & = 1 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrll} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 9 & \\ & -\ \beta & +2\gamma & = -1 & \\ & & \gamma & = 0 & L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & & = 9 \\ & -\ \beta & & = -1 \\ & & \gamma & = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rrrll} \alpha & & & = 3 & \\ & \beta & & = 1 & \text{par remontées successives} \\ & & \gamma & = 0 & \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution X_1 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$ est donné par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X_1(t) = 3e^{-t} U_{-1} + U_0 = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}}$$

□

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point limite vis-à-vis du système différentiel linéaire (S) ?

Démonstration. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6e^{-t} + 3 \\ 3e^{-t} + 1 \\ -6e^{-t} - 2 \end{pmatrix}$$

donc $x_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et $z_1(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} -2$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente, de point limite $(\ell_1, \ell_2, \ell_3) = (3, 1, -2)$. D'après la question ***9***, ce point limite est un état d'équilibre du système différentiel (S). □

b) ***i)*** Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$, que l'on notera X_2.

Démonstration. On considère une solution X quelconque de (S) :

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma e^t U_1$$

$$\begin{aligned}
X \text{ est solution de } (\mathcal{P}_2) &\iff X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \alpha U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 3 \\ \alpha & + \ \beta & & = 2 \\ -2\alpha & -2\beta & + \ \gamma & = -3 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 3 \\ & - \ \beta & +2\gamma & = 1 \\ & \beta & - \ \gamma & = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ L_2 \longleftarrow 2L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_1 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} 2\alpha & +3\beta & -2\gamma & = 3 \\ & - \ \beta & +2\gamma & = 1 \\ & & \gamma & = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \longleftarrow L_3 + L_2 \end{array} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} \alpha & & & = 1 \\ & \beta & & = 1 \\ & & \gamma & = 1 \end{array} \right. \quad \text{par remontées successives}
\end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution X_2 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$ est donné par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X_2(t) = e^{-t} U_{-1} + U_0 + e^t U_1 = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}}$$

□

ii) Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

Démonstration. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 3 - 2e^t \\ e^{-t} + 1 \\ -2e^{-t} - 2 + e^t \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $z_2(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente. □

c) On a représenté page suivante les tracés de 4 solutions du système différentiel linéaire (S). Dire quels sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-dessus. On justifiera les réponses.

Démonstration. • La figure 4 est la seule où l'on a $z(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi, cette figure correspond nécessairement à la solution X_2.

- Dans la figure 3, on a $z(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. Donc cette figure correspond à une trajectoire divergente. Ainsi, cette figure ne correspond pas à la solution X_1.
- Dans la figure 1, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$. Cette propriété n'est pas vérifiée par la solution X_1 donc cette figure ne correspond pas à X_1.
- Par élimination, la figure 2 correspond à la solution X_1. De plus, en lisant approximativement les valeurs limites sur le graphe, le tracé est cohérent avec le fait que $x_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 3$, $y_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $z_1(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} -2$.

$\square$

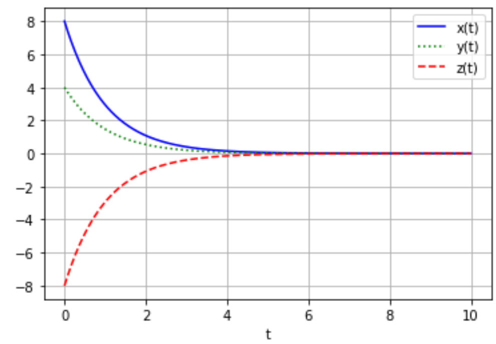


Fig. 1 Tracé 1

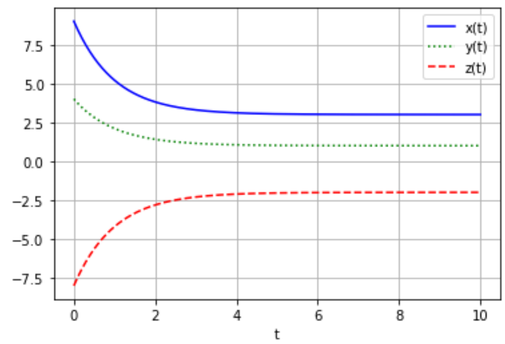


Fig. 2 Tracé 2

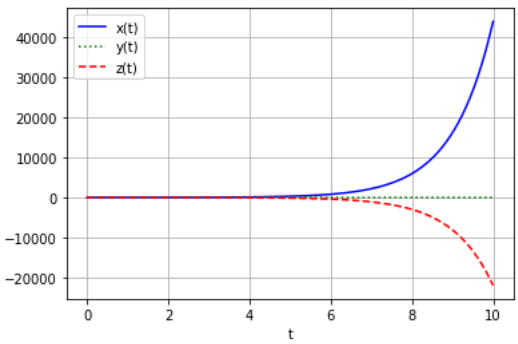


Fig. 3 Tracé 3

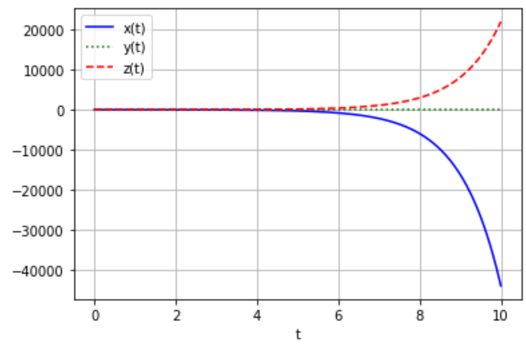


Fig. 4 Tracé 4

12. Dans cette question, on souhaite faire le lien entre la résolution d'un système différentiel linéaire (homogène) et l'exponentielle de matrice introduite à la partie II.

a) On fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et on considère la solution de (S) :

$$X : t \mapsto \alpha \mathrm{e}^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma \mathrm{e}^{t} U_1$$

On pose $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (où P est définie à la question ***2.b)***).

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \mathrm{e}^{tA} C$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA}C &= P\mathrm{e}^{tD}P^{-1}P\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} && \text{cf question } \textbf{\textit{7.b)}}\\
&= P\mathrm{e}^{tD}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-t} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\\
&= P\begin{pmatrix}\alpha\mathrm{e}^{-t}\\ \beta\\ \gamma\mathrm{e}^{t}\end{pmatrix}\\
&= P\left(\alpha\mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\mathrm{e}^{t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)\\
&= \alpha\mathrm{e}^{-t}P\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta P\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\mathrm{e}^{t}P\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \alpha\mathrm{e}^{-t}U_{-1} + \beta U_0 + \gamma\mathrm{e}^{t}U_1\\
&= X(t)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que P est précisément la matrice obtenue en concaténant les vecteurs colonnes U_{-1}, U_0 et U_1. □

b) Commenter le résultat obtenu à la question précédente, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficient constant.

Démonstration. Considérons une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants d'ordre 1 :

$$y' = ay$$

où $a \in \mathbb{R}^*$ est un paramètre.
D'après le cours, les solutions de cette équation sont de la forme :

$$y(t) = c\mathrm{e}^{at}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on a montré à la question précédente que les solutions de $X' = AX$ admettaient une « formule exponentielle » analogue : $c \in \mathbb{R}$ est analogue à $C \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (paramètre(s) à choisir) et e^{at} est analogue à e^{tA}. □

Problème 2 - Une propriété limite des lois de Pareto (ESSEC I 2011)

Question préliminaire

Soit g une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles.

1. a) Montrer que pour tout α et β dans I tels que $\alpha < \beta$:

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt = \int_{0}^{1} g\big(\alpha+(\beta-\alpha)x\big)\ dx$$

Démonstration.

- La fonction g est continue sur l'intervalle I. Comme α et β sont deux éléments de I, on en déduit que g est continue sur le **segment** $[\alpha, \beta]$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt$ est bien définie.
- On effectue le changement de variable $\boxed{x = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\ t - \dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}}$.

  $x = \dfrac{t-\alpha}{\beta-\alpha}$ (et donc $t = (\beta-\alpha)\,x+\alpha$)

  $\hookrightarrow dx = \dfrac{1}{\beta-\alpha}\ dt$ et $dt = (\beta-\alpha)\ dx$

  - $t = \alpha \ \Rightarrow\ x = 1$
  - $t = \beta \ \Rightarrow\ x = 0$

  Ce changement de variable est valide car $\psi : x \mapsto (\beta-\alpha)\,x+\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
  On obtient :
  $$\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt \ = \ \int_{0}^{1} g(\alpha+(\beta-\alpha)\,x)\ (\beta-\alpha)\ dx$$

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{1}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt = \int_{0}^{1} g\big(\alpha+(\beta-\alpha)x\big)\ dx.}$$

Commentaire

- Il est aussi possible de partir de l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} g(\alpha+(\beta-\alpha)\,x)\ dx$ et obtenir, à l'aide du changement de variable $\boxed{t = \alpha+(\beta-\alpha)\,x}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} g(t)\ dt$ (à une constante près).
- Dans cette question, on passe d'une intégrale sur le segment $[\alpha, \beta]$ à une intégrale sur le segment $[0, 1]$ (ou l'inverse). L'idée derrière le changement de variable opéré est assez simple. Il s'agit de paramétrer le segment $[\alpha, \beta]$ à l'aide des réels α et β. Plus précisément, on a :
  $$\{\alpha+(\beta-\alpha)\,x \mid x \in [0, 1]\} \ = \ [\alpha, \beta]$$
  Autrement dit, lorsque x parcourt le segment $[0, 1]$ dans son entier, $\alpha+(\beta-\alpha)\,x$ parcourt le segment $[\alpha, \beta]$ dans son entier. Généralement, cette égalité s'écrit plutôt sous la forme :
  $$\{x\,\beta+(1-x)\,\alpha \mid x \in [0, 1]\} \ = \ [\alpha, \beta]$$
  On comprend cette paramétrisation sur quelques exemples : si $x = 0$, on récupère α ; si $x = 1$, on récupère β ; si $x = \frac{1}{2}$, on récupère $\frac{\alpha+\beta}{2}$, le point milieu du segment $[\alpha, \beta]$. Ce dernier point correspond à l'isobarycentre du couple (α, β). Le point $x\,\beta+(1-x)\,\alpha$ apparaît lui comme le barycentre du couple (α, β) affecté des coefficients de pondération $1-x$ et x. Finalement, $[\alpha, \beta]$ s'écrit comme l'ensemble des barycentres de ce type. □

b) Soit a, b, c, d dans I tels que $a < c < d < b$.
On suppose g décroissante sur I, établir l'encadrement :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\ dt$$

Démonstration.

- Remarquons tout d'abord, à l'aide de la question précédente :

$$\frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\ dt \ = \ \int_0^1 g\big(c+(b-c)\,x\big)\ dx \qquad \textit{(car } c \textit{ et } b \textit{ sont des éléments de } I \textit{ tels que } c<b\textit{)}$$

$$\frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\ dt \ = \ \int_0^1 g\big(c+(d-c)\,x\big)\ dx \qquad \textit{(car } c \textit{ et } d \textit{ sont des éléments de } I \textit{ tels que } c<d\textit{)}$$

$$\frac{1}{d-a}\int_a^d g(t)\ dt \ = \ \int_0^1 g\big(a+(d-a)\,x\big)\ dx \qquad \textit{(car } a \textit{ et } d \textit{ sont des éléments de } I \textit{ tels que } a<d\textit{)}$$

- Cherchons tout d'abord à obtenir la première inégalité.
Soit $x \in [0,1]$.

Tout d'abord	d	$<$	b	*(d'après l'énoncé)*
donc	$d-c$	$<$	$b-c$	
ainsi	$(d-c)\ x$	$\leqslant$	$(b-c)\ x$	*(car $x \geqslant 0$)*
d'où	$c+(d-c)\ x$	$\leqslant$	$c+(b-c)\ x$	
enfin	$g\big(c+(d-c)\ x\big)$	$\geqslant$	$g\big(c+(b-c)\ x\big)$	*(car g est décroissante sur I)*

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \ g\big(c+(d-c)\ x\big)\ \geqslant\ g\big(c+(b-c)\ x\big)}$$

- D'après ce qui précède, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant 1$) :

$$\underbrace{\int_0^1 g\big(c+(d-c)\ x\big)\ dx}_{=\ \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\ dt} \ \geqslant\ \underbrace{\int_0^1 g\big(c+(b-c)\ x\big)\ dx}_{=\ \frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\ dt}$$

*(d'après la question **1.a)** avec $c<b$ et $c<d$)*

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{1}{b-c}\int_c^b g(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-c}\int_c^d g(t)\ dt.}$$

Commentaire

Dans la question précédente, on a détaillé un processus qui peut être vu comme une mise sous forme normale : toute intégrale entre α et β d'une fonction continue sur le **segment** $[\alpha,\beta]$ peut s'écrire comme une intégrale entre 0 et 1. L'intérêt d'une telle normalisation se perçoit très bien dans cette question. Au lieu d'étudier trois intégrales sur des domaines différents, l'étape de normalisation permet de ne considérer que des intégrales entre 0 et 1. On obtient trois objets sous la même forme, ce qui rend plus simple les comparaisons.

- Cherchons maintenant à obtenir la deuxième inégalité.
  Soit $x \in [0,1]$. Remarquons :

$$\begin{aligned}
& a + (d-a)\,x \ \leqslant\ c + (d-c)\,x \\
\Leftrightarrow\ & (\cancel{d} - a)\,x - (\cancel{d} - c)\,x \ \leqslant\ c - a \\
\Leftrightarrow\ & (c-a)\,x \ \leqslant\ c - a \\
\Leftrightarrow\ & x \ \leqslant\ 1 \qquad \textit{(car } c - a > 0\textit{)}
\end{aligned}$$

  La dernière inégalité étant vérifiée, il en est de même de la première.

  Ainsi $\quad a + (d-a)\ x \ \leqslant\ c + (d-c)\ x$

  donc $\quad g\big(a + (d-a)\ x\big) \ \geqslant\ g\big(c + (b-c)\ x\big) \qquad$ *(car g est décroissante sur I)*

$$\boxed{\forall x \in [0,1],\ \ g\big(a + (d-a)\ x\big) \ \geqslant\ g\big(c + (d-c)\ x\big)}$$

- Puis, par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant $(0 \leqslant 1)$:

$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int_0^1 g\big(a + (d-a)\ x\big)\ dx & \geqslant & \displaystyle\int_0^1 g\big(c + (d-c)\ x\big)\ dx \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\displaystyle\frac{1}{d-a} \int_a^d g(t)\ dt & & \displaystyle\frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\ dt
\end{array}$$

*(d'après la question **1.a)** avec $a < d$ et $c < d$)*

$$\boxed{\text{On a bien : } \frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-a} \int_a^d g(t)\ dt.}$$

□

Partie I - Partie fractionnaire d'une variable à densité

- Pour tout réel x positif ou nul :
  - on note $[x]$ la *partie entière* de x. On rappelle qu'il s'agit de l'unique entier naturel n qui vérifie l'encadrement : $n \leqslant x < n+1$.
  - on note $\big\{x\big\} = x - [x]$, que l'on appelle la *partie fractionnaire* de x.

  Par exemple, si $x = 12,34$, alors $[x] = 12$ et $\{x\} = 0,34$.
- Dans cette partie, X désigne une variable aléatoire à valeurs réelles admettant une densité f qui vérifie les propriétés :
  - f est nulle sur $]-\infty, 0[$;
  - la restriction de f à $[0, +\infty[$ est continue et décroissante.

  On pose $M = f(0)$, c'est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $Y = \big\{X\big\} = X - \big[X\big]$, la variable aléatoire égale à la partie fractionnaire de X.

On note F_Y la fonction de répartition de Y.

Commentaire

Généralement, on distingue les fonctions :

× partie entière par défaut, notée $\lfloor . \rfloor$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne l'entier directement inférieur à x (c'est-à-dire le plus grand entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leqslant x$).
(c'est la notation du programme utilisée pour définir la fonction partie entière)

× partie entière par excès, notée $\lceil . \rceil$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil$ désigne l'entier directement supérieur à x (c'est-à-dire le plus petit entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \geqslant x$).

Il ne faut pas se laisser déstabiliser par la nouvelle notation de l'énoncé ($[x]$ en lieu et place de $\lfloor x \rfloor$) et accepter de l'utiliser par la suite.

Commentaire

- Comme le stipule le programme officiel, « la fonction partie entière permet de discrétiser des phénomènes continus ». En particulier, si X est une v.a.r. à densité, la v.a.r. $T = [X]$ est, quant à elle, une v.a.r. discrète. L'étude de la v.a.r. T est relativement fréquente dans les sujets car cela permet de proposer un énoncé qui mêle v.a.r. à densité et v.a.r. discrètes.
- De manière assez malhabile, le sujet définit la fonction partie fractionnaire seulement sur l'intervalle $[0, +\infty[$. La définition de l'énoncé est en fait valable sur $\mathbb{R}$ tout entier. La conséquence de cette restriction de l'énoncé est que la v.a.r. $[X]$ n'est bien définie que si X est à valeurs positives. Or l'énoncé ne donne aucune information sur $X(\Omega)$. Par contre, on sait que X est une v.a.r. qui admet une densité nulle sur $]-\infty, 0[$. On peut donc démontrer :

$$\mathbb{P}\big(\,[X \geqslant 0]\,\big) = 1$$

Ainsi, la v.a.r. $[X]$ est **presque sûrement** bien définie.
C'est ce point de vue probabiliste qui est ici adopté par le concepteur.
- Profitons-en pour faire un point sur la notation $X(\Omega)$.
Rappelons qu'une v.a.r. X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
Comme la notation le suggère, $X(\Omega)$ est l'image de Ω par l'application X.
Ainsi, $X(\Omega)$ n'est rien d'autre que l'ensemble des valeurs prises par la v.a.r. X :

$$\begin{array}{rcl} X(\Omega) & = & \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists \omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\} \end{array}$$

Il faut bien noter que dans cette définition aucune application probabilité $\mathbb{P}$ n'apparaît.
- Il est toujours correct d'écrire : $X(\Omega) \ \subseteq\ ]-\infty, +\infty[$.
En effet, cette propriété signifie que toute v.a.r. X est à valeurs dans $\mathbb{R}$, ce qui est toujours le cas par définition de la notion de variable aléatoire réelle.
- Dans le cas des v.a.r. discrètes, il est d'usage relativement courant de confondre :
  - × l'ensemble des valeurs possibles de la v.a.r. X (*i.e.* l'ensemble $X(\Omega)$),
  - × l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \mathbb{P}\big(\,[X = x]\,\big) \neq 0\}$, ensemble des valeurs que X prend avec probabilité non nulle. Dans le cas qui nous intéresse ici, à savoir X est une v.a.r. discrète, cet ensemble est appelé support de X et est noté $\mathrm{Supp}(X)$.
- Dans le cas des v.a.r. à densité, la détermination de l'ensemble image est plus technique. Dans certains sujets, l'ensemble image des v.a.r. étudiées sera précisé (« On considère une v.a.r. à valeurs strictement positives »). Si ce n'est pas le cas :
  - × si X suit une loi usuelle, on peut se référer à l'ensemble image donné en cours. Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on se permet d'écrire :

    « Comme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, on **considère** : $X(\Omega) = [0, 1]$. »
  - × si X ne suit pas une loi usuelle, on étudie l'ensemble : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f_X(x) > 0\}$.
    On se permet alors d'écrire :

    « Dans la suite, on **considère** : $X(\Omega) = I$. »

  En **décrétant** la valeur de $X(\Omega)$, on ne commet pas une erreur mais on décide d'ajouter une hypothèse qui ne fait pas partie de l'énoncé. Cette audace permet de travailler avec un ensemble image connu, ce qui permet de structurer certaines démonstrations (l'ensemble image étant connu, on se rappelle que la fonction de répartition, par exemple, s'obtient par une disjonction de cas).

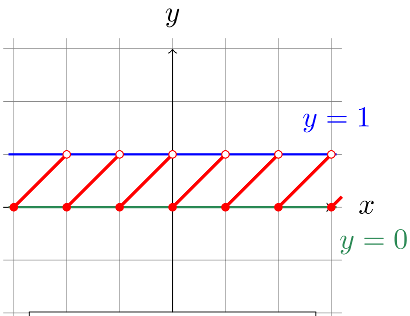
2. Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y < 0$? Que vaut $F_Y(y)$ lorsque $y \geqslant 1$?
On justifiera les réponses.

Démonstration.

- On note $h : x \mapsto x - [x]$ de telle sorte que $Z = h(X)$.
Comme : $X(\Omega) \subseteq]-\infty, +\infty[$, on obtient alors :
$$\begin{array}{rcccl} Y(\Omega) & = & \big(h(X)\big)(\Omega) & = & h\big(X(\Omega)\big) \\ & & & \subseteq & h\big(]-\infty,+\infty[\big) \ \subseteq \ [0,1[\end{array}$$
La dernière inclusion est obtenue de la manière suivante.
Soit $x \in [0, +\infty[$. Par définition de la partie entière : $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Or :
$$[x] \leqslant x < [x]+1 \ \Leftrightarrow \ 0 \leqslant x - [x] < 1 \ \Leftrightarrow \ 0 \leqslant h(x) < 1$$
$$\boxed{\text{Ainsi : } Y(\Omega) \subset [0,1[.}$$
- Soit $y \in \mathbb{R}$. Deux cas simples se présentent :
  × si $y \in]-\infty, 0[$, alors : $[Y \leqslant y] = \varnothing$, car $Y(\Omega) \subset [0,1[$. Donc :
$$F_Y(y) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant y]) \ = \ \mathbb{P}(\varnothing) \ = \ 0$$
  × si $y \in [1, +\infty[$, alors : $[Y \leqslant y] = \Omega$, car $Y(\Omega) \subset [0,1[$. Donc :
$$F_Y(y) \ = \ \mathbb{P}([Y \leqslant y]) \ = \ \mathbb{P}(\Omega) \ = \ 1$$
$$\boxed{\text{Pour tout } y < 0,\ F_Y(y) = 0 \text{ et pour tout } y \geqslant 1,\ F_Y(y) = 1.}$$

Commentaire

- Profitons de cette question pour faire un point sur la fonction **partie fractionnaire** $x \mapsto x - [x]$.
Sa représentation graphique est la suivante :



Fonction $x \mapsto x - [x]$

- La fonction partie fractionnaire est un cas particulier de fonctions dites **périodiques**.
  × Soit $T \in [0, +\infty[$. Une fonction est dite T-périodique si :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$$
  Le réel T est appelé **période de la fonction** f.
  × La représentation graphique sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f T-périodique s'obtient par translation de sa représentation graphique sur un intervalle de longueur T (par exemple l'intervalle $[0, T[$).

La fonction partie fractionnaire est une fonction 1-périodique. Sa représentation graphique sur $\mathbb{R}$ s'obtient bien par translation de sa représentation graphique sur un intervalle de longueur 1 (par exemple par translation de sa représentation graphique sur l'intervalle $[0, 1[$). □

3. Justifier l'égalité entre évènements : $[Y=0] = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [X=n]$.

En déduire : $F_Y(0) = 0$.

Démonstration.

- Soit $\omega \in \Omega$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\omega \in [Y=0] & \Leftrightarrow & Y(\omega) = 0 \\
& \Leftrightarrow & X(\omega) - [X](\omega) = 0 \\
& \Leftrightarrow & X(\omega) = [X](\omega) \\
& \Leftrightarrow & X(\omega) \text{ est un entier positif} \\
& \Leftrightarrow & \text{Il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } X(\omega) = n \\
& \Leftrightarrow & \text{Il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \omega \in [X=n] \\
& \Leftrightarrow & \omega \in \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} [X=n]
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en déduit : } [Y=0] = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} [X=n].}$$

Commentaire

- Par définition, un événement est un ensemble. Démontrer l'égalité de deux ensembles c'est démontrer que tout élément du premier ensemble est dans le second et inversement. Ou encore qu'un élément est dans le premier ensemble si et seulement si il est aussi dans le second (c'est la manière de procéder choisie ici).
- En terme d'événement, cela signifie que le premier événement est réalisé si et seulement si le second événement est réalisé. Plus précisément, il existe ω réalisant le premier événement si et seulement si ce même ω réalise le second événement.

- Par ailleurs :

$$\begin{array}{rcll}
[Y \leqslant 0] & = & [Y<0] \cup [Y=0] & \\
& = & \varnothing \cup [Y=0] & \textit{(car } Y(\Omega) = [0,1[\textit{)} \\
& = & [Y=0] &
\end{array}$$

On en déduit :

$$\begin{array}{rcll}
F_Y(0) & = & \mathbb{P}\big([Y=0]\big) & \\
& = & \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} [X=n]\right) & \textit{(d'après le début de question)} \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([X=n]\big) & \textit{(par } \sigma\textit{-additivité et car les événements de la famille } \big([X=n]\big)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ sont deux à deux incompatibles)} \\
& = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 0 \ = \ 0 & \textit{(car } X \textit{ est une v.a.r. à densité)}
\end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } F_Y(0) = 0.}$$

□

4. Soit y un réel de l'intervalle $]0,1[$.

a) Montrer l'égalité : $F_Y(y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\, dt$.

Démonstration.

- On note $T = [X]$. Dans la suite, on **considère** $X(\Omega) = [0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{On a alors : } T(\Omega) = \mathbb{N}.}$$

- La famille $\big([T = n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements.
  Ainsi, par la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcll} F_Y(y) & = & \mathbb{P}\big([Y \leqslant y]\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big([X - T \leqslant y]\big) & \textit{(par définition de } Y\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T = n] \cap [X - T \leqslant y]\big) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([T = n] \cap [X - n \leqslant y]\big) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([[X] = n] \cap [X \leqslant n+y]\big) & \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([n \leqslant X < n+1] \cap [X \leqslant n+y]\big) & \textit{(par définition de la partie entière)} \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\big([n \leqslant X \leqslant n+y]\big) & \textit{(car } y \in\,]0,1[\textit{)} \\ & = & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\, dt & \textit{(car } X \textit{ admet } f \textit{ pour densité)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } y \in\,]0,1[\,:\, F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\, dt.}$$

Commentaire

On a utilisé dans cette question l'égalité : $[n \leqslant X < n+1] \cap [X \leqslant n+y] \;=\; [n \leqslant X \leqslant n+y]$.
Pour l'obtenir, il suffit de démontrer :

$$[X < n+1] \cap [X \leqslant n+y] \;=\; [X \leqslant n+y]$$

Comme signalé dans la remarque précédente, ce résultat se démontre par double inclusion.

($\subseteq$) Soit $\omega \in [X < n+1] \cap [X \leqslant n+y]$. Alors, en particulier, $\omega \in [X \leqslant n+y]$.

($\supseteq$) Soit $\omega \in [X \leqslant n+y]$. Alors $X(\omega) \leqslant n+y$. Ainsi :

$$X(\omega) \leqslant n + y < n+1 \qquad \textit{(car } y < 1\textit{)}$$

On en conclut : $\omega \in [X \leqslant n+1]$.
On obtient ainsi, à l'aide de l'hypothèse initiale : $\omega \in [X \leqslant n+y] \cap [X \leqslant n+1]$.

$\square$

b) Montrer, en utilisant la question préliminaire, les inégalités :

– Pour tout n entier naturel : $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ y \int_n^{n+1} f(t)\ dt.$

– Pour tout n entier naturel non nul : $\displaystyle\int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \leqslant\ y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt.$

Démonstration.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la question ***1.b)*** avec :
  - × $I = [0, +\infty[$.
  - × $g = f_{|[0,+\infty[}$ (restriction de f à $[0, +\infty[$).
    La fonction g est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$.
  - × $c = n \in I$, $d = n + y \in I$ et $b = n + 1 \in I$ (on a bien $c < d < b$).

$$\frac{1}{b-c} \int_c^b g(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\ dt$$

$$\frac{1}{1} \int_n^{n+1} f(t)\ dt \qquad\qquad \frac{1}{y} \int_n^{n+y} f(t)\ dt$$

(les deux membres étant égaux respectivement) *(car $[n, n+y[\subseteq [0, +\infty[$ et $[n, n+1[\subseteq [0, +\infty)$*

$$\boxed{\text{On a bien : } \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ y \int_n^{n+1} f(t)\ dt.}$$

- Sous les mêmes hypothèses, avec $a = n - 1 + y$ et $c = n$ et $d = n + y$ comme précédemment (on a bien $a < c < d$), on a, d'après la question ***1.b)*** :

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d g(t)\ dt \ \leqslant\ \frac{1}{d-a} \int_a^d g(t)\ dt$$

$$\frac{1}{y} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \qquad\qquad \frac{1}{1} \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{On a bien : } y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ \int_n^{n+y} f(t)\ dt.}$$

Commentaire

À première vue, il est difficile de faire le lien entre le résultat exposé dans cette question et celui de la question ***1.b)***. Il peut d'ailleurs sembler ardu de trouver les valeurs de a, b, c et d pour lesquelles on doit appliquer le résultat. En réalité, on n'a guère le choix :
- × dans la première inégalité à démontrer ici, les bornes basses des intégrales ont la même valeur n. Cela correspond à la première inégalité de ***1.b)*** où l'on retrouve la même borne basse c des deux côtés de l'inégalité. Une fois $c = n$ posé, les valeurs $b = n + 1$ et $d = n + y$ suivent logiquement.
- × dans la deuxième inégalité à démontrer, les bornes hautes des intégrales ont même valeur $n + y$. Cela correspond à la deuxième inégalité de ***1.b)*** où l'on retrouve la même borne haute d des deux côtés.

Finalement, cette question ne présente pas de difficulté majeure. D'ailleurs, l'énoncé fournit la manière de procéder en précisant qu'il s'agit d'utiliser la question préliminaire. □

c) En déduire : $y \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt \ \leqslant\ F_Y(y) \ \leqslant\ \int_0^y f(t)\ dt + y \int_y^{+\infty} f(t)\ dt$, puis l'encadrement :

$$y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M$$

Démonstration.

- D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ y \int_n^{n+1} f(t)\ dt$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ \sum_{n=0}^{m} \left(y \int_n^{n+1} f(t)\ dt \right) = y \sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+1} f(t)\ dt = y \int_0^{m+1} f(t)\ dt \quad \textit{(par relation de Chasles)}$$

Or :

× d'après la question ***4.a)***, la quantité $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt$ admet une limite finie lorsque m tend vers $+\infty$.

× l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente car f est une densité de probabilité. On en déduit que la quantité de droite admet elle aussi une limite finie lorsque m tend vers $+\infty$.

Finalement, par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$F_Y(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \geqslant\ y \int_0^{+\infty} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } y \int_0^{+\infty} f(t)\ dt \ \leqslant\ F_Y(y).}$$

- D'après la question précédente, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \leqslant\ y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt$$

Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt - \int_0^y f(t)\ dt = \sum_{n=1}^{m} \int_n^{n+y} f(t)\ dt \ \leqslant\ \sum_{n=1}^{m} \left(y \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt \right) = y \sum_{n=1}^{m} \int_{n-1+y}^{n+y} f(t)\ dt = y \int_y^{m+y} f(t)\ dt$$

Finalement, par passage à la limite dans l'inégalité (autorisé pour les raisons précédentes), on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n}^{n+y} f(t)\ dt - \int_{0}^{y} f(t)\ dt \leqslant y \int_{y}^{+\infty} f(t)\ dt$$

$$\boxed{\text{Ainsi : } F_Y(y) \leqslant \int_{0}^{y} f(t)\ dt + y \int_{y}^{+\infty} f(t)\ dt.}$$

- Par ailleurs :
  × $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$ car f est une densité de probabilité.
  × $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt$ car f est nulle en dehors de $[0, +\infty[$.

$$\boxed{\int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt = 1}$$

On a de plus, comme $y > 0$ alors $[X \geqslant y] \subseteq [X \geqslant 0]$ et :

$$\int_{y}^{+\infty} f(t)\ dt = \mathbb{P}\big([X \geqslant y]\big) \leqslant \mathbb{P}\big([X \geqslant 0]\big) = \int_{0}^{+\infty} f(t)\ dt = 1$$

$$\boxed{\text{Par multiplication par } y > 0, \text{ on obtient : } y \int_{y}^{+\infty} f(t)\ dt \leqslant y.}$$

Enfin, comme f est décroissante :

$$\forall t \in [0, y],\ f(t) \leqslant f(0) = M$$

Par croissance de l'intégrale, les bornes étant dans l'ordre croissant ($0 \leqslant y$), on a :

$$\int_{0}^{y} f(t)\ dt \leqslant \int_{0}^{y} M\ dt = M\ y$$

$$\boxed{\text{Comme } y < 1 \text{ et } M = f(0) \geqslant 0, \int_{0}^{y} f(t)\ dt \leqslant M\ y \leqslant M.}$$

$$\boxed{\text{En combinant tous ces résultats, on obtient bien : } y \leqslant F_Y(y) \leqslant y + M.}$$

□

Partie II - Premier chiffre significatif d'une variable de Pareto

Pour tout réel λ strictement positif, on définit la fonction g_λ sur $\mathbb{R}$ par $g_\lambda : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

5. Montrer que pour tout réel λ strictement positif, g_λ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ (loi dite *de Pareto*).

Démonstration.
Soit $\lambda > 0$.

- Tout d'abord, la fonction g_λ est :
  - × continue sur $]-\infty, 1[$ car constante sur cet intervalle.
  - × continue sur $]1, +\infty[$ comme inverse de la fonction $x \mapsto x^{\lambda+1}$:
    - continue sur $]1, +\infty[$,
    - et qui ne s'annule pas sur $]1, +\infty[$.

  $\boxed{\text{La fonction } f \text{ est donc continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf éventuellement en un nombre fini de points.}}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - × si $x \in]-\infty, 1[$, alors : $g_\lambda(x) = 0 \geqslant 0$.
  - × si $x \in [1, +\infty[$, alors comme $\lambda > 0$ et $x > 0$, on a : $g_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{x^{\lambda+1}} \geqslant 0$.

  $\boxed{\text{Finalement : } \forall x \in \mathbb{R},\ g_\lambda(x) \geqslant 0.}$

- Il reste à démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x)\, dx$ converge et vaut 1.

  Tout d'abord :
  $$\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(x)\, dx = \int_{1}^{+\infty} g_\lambda(x)\, dx$$
  car g_λ est nulle en dehors de $[1, +\infty[$.

  La fonction g_λ est continue par morceaux sur $[1, +\infty[$.
  Ainsi, l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g_\lambda(x)\, dx$ est impropre seulement en $+\infty$.

  Soit $B \in [1, +\infty[$.
  $$\begin{aligned} \int_1^B g_\lambda(t)\, dt &= \int_1^B \lambda \frac{1}{t^{\lambda+1}}\, dt = \lambda \int_1^B t^{-\lambda-1}\, dt \\ &= \cancel{\lambda} \left[\frac{x^{-\lambda}}{-\cancel{\lambda}} \right]_1^B = -1 \left[\frac{1}{x^\lambda} \right]_1^B && \textit{(car } \lambda \neq 0\textit{)} \\ &= -\left(\frac{1}{B^\lambda} - \frac{1}{1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{B^\lambda} \underset{B \to +\infty}{\longrightarrow} 1 && \textit{(car } \lambda > 0\textit{)} \end{aligned}$$

  $\boxed{\text{Ainsi, l'intégrale impropre } \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_\lambda(t)\, dt \text{ est convergente et vaut 1.}}$

$$\boxed{\text{On en conclut que } g_\lambda \text{ est bien une densité de probabilité.}}$$

Commentaire

- De manière générale, on dit d'une v.a.r. suit la loi de Pareto de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ si elle admet pour densité la fonction f définie par :

$$f \ : \ t \ \mapsto \ \begin{cases} 0 & \text{si } t < b \\ a\,\dfrac{b^a}{t^{a+1}} & \text{si } t \geqslant b \end{cases}$$

  Dans cet énoncé, on étudie donc le cas particulier où $b = 1$.

- Pour démontrer qu'une fonciton est une densité de probabilité, il est nécessaire de démontrer qu'une intégrale impropre est convergente et de valeur 1. Ce type de question exige donc un calcul et non un résultat de convergence comme le théorème de comparaison des intégrales généralisées de fonctions continues positives.

- On peut toutefois noter que démontrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\lambda+1}}\, dt$ est simple. On reconnaît en effet une intégrale de Riemann, impropre en $+\infty$ et d'exposant $\lambda + 1 > 1$. □

Dans toute la suite, on note Z_λ une variable aléatoire admettant g_λ pour densité.

6. Déterminer la fonction de répartition G_λ de Z_λ.

Démonstration.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :

× si $x \in\,]-\infty, 1[$. Comme f est nulle en dehors de $[1, +\infty[$:

$$G_\lambda(x) \ = \ \mathbb{P}\big([Y_\lambda \leqslant x]\big) \ = \ \int_{-\infty}^{x} g_\lambda(t)\ dt \ = \ 0$$

× si $x \in [1, +\infty[$:

$$\begin{aligned} G_\lambda(x) &= \int_{-\infty}^{x} g_\lambda(t)\ dt \\ &= \cancel{\int_{-\infty}^{1} g_\lambda(t)\ dt} + \int_{1}^{x} g_\lambda(t)\ dt && \textit{(par relation de Chasles et car } f \textit{ est nulle en dehors de } [1,+\infty[\textit{)} \\ &= 1 - \frac{1}{x^\lambda} && \textit{(en reprenant le calcul de la question précédente pour } B = x \in [1,+\infty[\textit{)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement : } G_\lambda : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \left(\dfrac{1}{x}\right)^\lambda & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}}$$

□

7. On note ln la fonction *logarithme népérien*, et log la fonction *logarithme décimal*.

Cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ par : $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ pour tout réel x strictement positif.

On pose $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$, et on note F_λ la fonction de répartition de X_λ.

a) Établir, pour tout réel x, l'égalité : $F_\lambda(x) = G_\lambda\big(10^x\big)$.

Démonstration.

- Commençons par déterminer $X_\lambda(\Omega)$.
  Notons $h : x \mapsto \log(x)$, de sorte que $X_\lambda = h(Z_\lambda)$.
  On **considère** $Z_\lambda(\Omega) = [1, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcll} X_\lambda(\Omega) & = & \big(h(Z_\lambda)\big)(\Omega) \ = \ h\big(Z_\lambda(\Omega)\big) & \\ & = & h\big([1, +\infty[\big) & \\ & = & [h(1), \lim\limits_{x \to +\infty} h(x)[& \textit{(car la fonction } h \textit{ est continue et strictement croissante sur } [1, +\infty[\textit{)} \\ & = & [0, +\infty[& \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } X_\lambda(\Omega) = [0, +\infty[.}$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Deux cas se présentent :
  - si $x < 0$, alors $[X_\lambda \leqslant x] = \varnothing$ car $X_\lambda(\Omega) = [0, +\infty[$. Donc :

$$F_\lambda(x) = \mathbb{P}\big(\,[X_\lambda \leqslant x]\,\big) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

  En particulier, comme $x < 0$ alors $10^x < 1$ et $G_\lambda(10^x) = 0$.

$$\boxed{\text{On a bien : } \forall x < 0,\ F_\lambda(x) = 0 = G_\lambda(10^x).}$$

  - si $x \geqslant 0$ alors :

$$\begin{array}{rcll} F_\lambda(x) & = & \mathbb{P}\big(\,[Z_\lambda \leqslant x]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[\log(Z_\lambda) \leqslant x]\,\big) & \\ & = & \mathbb{P}\left(\left[\dfrac{\ln(Z_\lambda)}{\ln(10)} \leqslant x\right]\right) & \textit{(par définition de } \log\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[\ln(Z_\lambda) \leqslant x\ \ln(10)]\,\big) & \textit{(car } \ln(10) > 0\textit{)} \\ & = & \mathbb{P}\big(\,[Z_\lambda \leqslant \exp\big(x\ \ln(10)\big)]\,\big) & \textit{(par stricte croissance de } \exp \textit{ sur } \mathbb{R}\textit{)} \\ & = & G_\lambda(10^x) & \textit{(car } e^{x\ \ln(10)} = e^{\ln(10^x)} = 10^x\textit{)} \end{array}$$

$$\boxed{\text{On obtient finalement : } F_\lambda : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ G_\lambda(10^x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.}$$

Commentaire

- On s'est permis de considérer : $Z_\lambda(\Omega) = [1, +\infty[$ conformément à la remarque faite en début de **Partie I**. Une telle hypothèse assure la bonne définition de la v.a.r. $X_\lambda = \log(Z_\lambda)$ (sans précision sur $Z_\lambda(\Omega)$, la v.a.r. Z_λ est seulement presque sûrement bien définie).
- Lors de l'étude du 2ème cas, l'argument $x \geqslant 0$ n'est pas utile. L'esprit du sujet était d'ailleurs plutôt de démontrer, dans cette question : $\forall x \in \mathbb{R},\ F_\lambda(x) = G_\lambda(10^x)$ et de reporter la disjonction de cas dans la question suivante. Dans cette correction, on a opté pour la présentation habituelle qui permet de mettre en avant le fait que la fonction F_λ est définie par cas.

□

b) En déduire que X_λ suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre en fonction de λ.

Démonstration.
Soit $x \in [0, +\infty[$.

- On a :

$$\begin{array}{rcll} F_\lambda(x) & = & G_\lambda(10^x) & \textit{(d'après la question précédente)} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{(10^x)^\lambda} & \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{6.}}\textit{)} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{10^{\lambda\, x}} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{\exp\big(\lambda\, x\ \ln(10)\big)} & \\ & = & 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln(10)\,\lambda\, x}} \ = \ 1 - \mathrm{e}^{-\ln(10)\,\lambda\, x} & \end{array}$$

- Ainsi :

$$F_\lambda : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\ln(10)\,\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{array} \right.$$

On reconnaît la fonction de répartition associée à la loi $\mathcal{E}\left(\ln(10)\,\lambda\right)$.

$$\boxed{\text{On en conclut : } X_\lambda \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\ln(10)\,\lambda\right).}$$

Commentaire

- Généralement, lorsque l'on considère une v.a.r. Z qui suit une loi de Pareto de paramètre $a > 0$ et $b > 0$ (la définition est donnée dans la remarque de la quesiton ***5.***), on introduit la v.a.r. $X = \ln\left(\dfrac{Z}{b}\right)$. On démontre alors que X suit une loi exponentielle.
Plus précisément, on a : $X \hookrightarrow \mathcal{E}\left(a\right)$.
- Dans ce sujet, on étudie la loi de Pareto avec paramètre $b = 1$. En lieu et place de Z_λ, on aurait pu introduire $T_\lambda = \ln\left(\dfrac{Z_\lambda}{1}\right) = \ln(Z_\lambda)$. D'après ce qui précède : $T_\lambda \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\lambda\right)$. Le choix de l'énoncé de travailler avec le logarithme en base 10 au lieu du logarithme népérien peut donc paraître surprenant. Il introduit une difficulté qui ne paraît pas nécessaire (avec la présence artificielle de $\ln(10)$). Ce choix est en réalité expliqué par la question ***9.*** : le travail à l'aide du logarithme décimal est classique lors de l'étude de la loi de Benford. □

8. On pose $Y_\lambda = \big\{X_\lambda\big\}$, la partie fractionnaire de X_λ.

Montrer, en utilisant les résultats de la partie I, que pour tout réel y de l'intervalle $]0,1[$:

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([Y_\lambda \leqslant y] \big) = y$$

En déduire que, lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.

Démonstration.

- D'après la question précédente : $X_\lambda \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\ln(10)\,\lambda\right)$.
  On en déduit que la fonction f_λ ci-dessous est **une** densité de la v.a.r. X_λ.

$$f_\lambda : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \ln(10)\,\lambda\ \mathrm{e}^{-\ln(10)\,\lambda\, x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

- La fonction f_λ vérifie les propriétés :
  - f est nulle sur $]-\infty, 0[$;
  - la restriction de f à $[0,+\infty[$ est continue et décroissante.

  On pose alors $M = f_\lambda(0) = \ln(10)\,\lambda$, le maximum de f_λ sur $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{La v.a.r. } X_\lambda \text{ vérifie donc les propriétés permettant d'appliquer les résultats de la } \textbf{Partie I}.}$$

- D'après la **Partie I**, la v.a.r. Y_λ admet pour fonction de répartition la fonction F_{Y_λ} suivante :

$$F_{Y_\lambda} : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ F_{Y_\lambda}(y) & \text{si } y \in [0,1[\\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}$$

  Enfin, d'après la question ***4.c)*** : $\forall y \in \,]0,1[, \ y \ \leqslant \ F_{Y_\lambda}(y) \ \leqslant \ y + \ln(10)\,\lambda$.

- Soit $y \in \,]0,1[$ et soit $\lambda > 0$. On a :
  × $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} y = y$,
  × $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} y + \ln(10)\,\lambda = y$,

$$\boxed{\text{Par théorème d'encadrement, on a : } \lim_{\lambda \to 0^+} F_{Y_\lambda}(y) = y.}$$

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Quatre cas se présentent :
  × si $y < 0$ alors $F_{Y_\lambda}(y) = 0 \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
  × si $y = 0$ alors $F_{Y_\lambda}(0) = 0$.
  En effet, comme F_{Y_λ} est la fonction de répartition d'une v.a.r. à densité, alors F_{Y_λ} est continue sur $\mathbb{R}$. Par continuité en 0, on obtient :

$$F_{Y_\lambda}(0) = \lim_{y \to 0^-} F_{Y_\lambda}(y) = \lim_{y \to 0^-} 0 = 0$$

$$\boxed{F_{Y_\lambda}(0) = 0}$$

  On en déduit alors : $F_{Y_\lambda}(0) = 0 \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} 0$.

× si $y \in \,]0,1[$ alors $F_{Y_\lambda}(y) \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} y$ d'après ce qui précède.

× si $y \geqslant 1$ alors $F_{Y_\lambda}(y) = 1 \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} 1$.

Finalement : $\forall y \in \mathbb{R}$, $F_{Y_\lambda}(y) \underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} F(y)$ où F est la fonction :

$$F : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } y \in [0,1[\\ 1 & \text{si } y \geqslant 1 \end{cases}$$

On reconnaît la fonction de répartition associé à la loi uniforme sur $[0,1]$.

$$\boxed{\text{On a donc bien démontré que lorsque } \lambda \text{ tend vers } 0,\ Y_\lambda \text{ converge en loi vers } Y \text{ avec } Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1]).}$$

Commentaire

- On demande dans cette question de démontrer que « lorsque λ tend vers 0, Y_λ converge en loi vers un v.a.r. suivant la loi uniforme sur $[0,1]$ ». Or, conformément au programme officiel, on définit la convergence en loi d'une **suite** de v.a.r. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers une v.a.r. Y.
  La question, telle que posée ici, n'entre donc pas dans le cadre du programme.
- Il est cependant assez simple d'adapter cette question au programme. Pour ce faire, il suffit de considérer la suite de v.a.r. $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $V_n = Y_{\frac{1}{n}}$ (on « pose » $\lambda = \frac{1}{n}$).
  On obtient ainsi : $V_n \underset{n\to+\infty}{\overset{\mathscr{L}}{\longrightarrow}} V$ où $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])$.

□

9. Pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on note $\alpha(x)$ le premier chiffre dans l'écriture décimale de x. C'est un entier de l'intervalle $[\![1,9]\!]$.

Par exemple, $\alpha(50) = 5$ et $\alpha(213,43) = 2$.

a) Pour tout $k \in [\![1,9]\!]$, montrer l'équivalence :

$$\alpha(x) = k \ \Leftrightarrow\ \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[$$

Démonstration.
Soit $x \geqslant 1$ et soit $k \in [\![1,9]\!]$.

- On procède tout d'abord par équivalence.

$$\begin{array}{cll}
& \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[& \\
\Leftrightarrow & \log(k) \ \leqslant\ \big\{\log(x)\big\} \ <\ \log(k+1) & \\
\Leftrightarrow & \dfrac{\ln(k)}{\ln(10)} \ \leqslant\ \big\{\log(x)\big\} \ <\ \dfrac{\ln(k+1)}{\ln(10)} & \\
\Leftrightarrow & \ln(k) \ \leqslant\ \big\{\log(x)\big\} \times \ln(10) \ <\ \ln(k+1) & \textit{(car } \ln(10) > 0\textit{)} \\
\Leftrightarrow & k \ \leqslant\ \exp\big(\big\{\log(x)\big\} \times \ln(10)\big) \ <\ k+1 & \textit{(car la fonction } \exp \textit{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}\textit{)} \\
\Leftrightarrow & k \ \leqslant\ \exp\big(\ln\big(10^{\{\log(x)\}}\big)\big) \ <\ k+1 & \\
\Leftrightarrow & k \ \leqslant\ 10^{\{\log(x)\}} \ <\ k+1 & \\
\Leftrightarrow & \big\lfloor 10^{\{\log(x)\}} \big\rfloor = k & \textit{(par définition de la partie entière)}
\end{array}$$

$$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ \forall k \in [\![1,9]\!],\ \ \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[\ \Leftrightarrow\ \big\lfloor 10^{\{\log(x)\}} \big\rfloor = k}$$

Commentaire

- Il est à noter que l'on part de la propriété de l'équivalence qui a la formulation la plus complexe. C'est une manière classique de procéder : on part du plus complexe pour aller vers le plus simple. En partant dans ce sens, cette première partie de la démonstration ne présente pas de difficulté majeure. Il s'agit simplement de remplacer la fonction log par sa définition et de faire en sorte de simplifier les inégalités.
- L'énoncé ne détaille par les propriétés de la fonction log, qui n'est autre que la fonction logarithme en base 10. Cette fonction vérifie des propriétés similaires à la fonction logarithme népérien (qui n'est autre que le logarithme en base e). On a notamment :
  - × la fonction log (logarithme en base 10) est strictement croissante et continue sur $]0,+\infty[$. Elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]-\infty,+\infty[$.
    Sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto 10^x$. En particulier :
    $$y = 10^x \ \Leftrightarrow \ x = \log(y)$$
    $$\forall y \in \,]0,+\infty[, \ 10^{\log(x)} = x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in \,]-\infty,+\infty[, \ \log(10^y) = y$$
  - × pour tout $(x, y) \in \,]0,+\infty[\, \times \,]0,+\infty[$, on a :
    $$\log\big(x \times y\big) \ = \ \log(x) + \log(y) \qquad \text{et} \qquad \log\left(\frac{x}{y}\right) \ = \ \log(x) - \log(y)$$

- Il reste alors à démontrer : $\big[10^{\{\log(x)\}}\big] = \alpha(x)$.
  - × Tout d'abord, par définition : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\{y\} = y - [y]$.
    Pour $y = \log(x)$, on obtient : $\big\{\log(x)\big\} = \log(x) - \big[\log(x)\big]$. Ainsi :
    $$\begin{aligned} 10^{\{\log(x)\}} &= 10^{\log(x) - \big[\log(x)\big]} \\ &= \frac{10^{\log(x)}}{10^{[\log(x)]}} \\ &= \frac{x}{10^{[\log(x)]}} \end{aligned}$$
    $$\boxed{10^{\{\log(x)\}} \ = \ \frac{x}{10^{[\log(x)]}}}$$
  - × Comme $x \geqslant 1$, il existe un unique entier $r \in \mathbb{N}$ tel que :
    $$10^r \ \leqslant \ x \ < \ 10^{r+1}$$
    (r renseigne sur l'ordre de grandeur de x : si $r = 0$, x est de l'ordre des unités ; si $r = 1$, x est de l'ordre des dizaines ; si $r = 2$, x est de l'ordre des centaines ...)
    Cet entier r s'exprime aisément en fonction de x. En effet :
    $$\begin{aligned} & 10^r \ \leqslant \ x \ < \ 10^{r+1} \\ \Leftrightarrow \ & r \ \leqslant \ \log(x) \ < \ r+1 \qquad \textit{(par stricte croissance de la fonction } \log \textit{ sur }]0,+\infty[\textit{)} \\ \Leftrightarrow \ & [\log(x)] = r \end{aligned}$$

× Notons alors : $\beta(x) = x - \alpha(x) \times 10^r$.
($\alpha(x)$ est le premier chiffre significatif ; $\alpha(x) \times 10^r$ est l'ordre de grandeur ; $\beta(x)$ est le nombre qui commence à partir du deuxième chiffre significatif de x)
On a :

$$\begin{array}{rrcl} & x & = & \alpha(x) \times 10^r + \beta(x) \\ \text{donc} & \dfrac{x}{10^r} & = & \alpha(x) + \dfrac{\beta(x)}{10^r} \end{array}$$

Par définition : $\beta(x) \in [0, 10^r[$ donc : $\dfrac{\beta(x)}{10^r} \in [0, 1[$. On en déduit :

$$\begin{array}{ccccc} \alpha(x) & \leqslant & \alpha(x) + \dfrac{\beta(x)}{10^r} & \leqslant & \alpha(x) + 1 \\ & & \shortparallel & & \\ & & \dfrac{x}{10^r} & & \end{array}$$

$$\boxed{\text{On en conclut : } \alpha(x) = \left[\dfrac{x}{10^r}\right] = \left[\dfrac{x}{10^{[\log(x)]}}\right].}$$

En combinant tous les résultats précédents, on obtient, pour tout $x \geqslant 1$ et tout $k \in [\![1, 9]\!]$:

$$\begin{array}{rcl} \big\{\log(x)\big\} \in \big[\log(k), \log(k+1)\big[& \Leftrightarrow & \left[10^{\{\log(x)\}}\right] = k \\ & \Leftrightarrow & \left[\dfrac{x}{10^{[\log(x)]}}\right] = k \\ & \Leftrightarrow & \alpha(x) = k \end{array}$$

Commentaire

La démonstration $\alpha(x) = \left[10^{\{\log(x)\}}\right]$ est délicate. Il est vivement conseillé de laisser de côté cette partie de la question. C'est l'une des dernières questions du sujet. On peut donc penser que le concepteur a pour but ici d'offrir un challenge aux meilleurs candidats. Il est fort probable que le barème d'une telle question soit peu précis et qu'on laisse le correcteur féliciter toute tentative raisonnable de démonstration.

□

b) On note $C_\lambda = \alpha\big(Z_\lambda\big)$ la variable aléatoire prenant comme valeur le premier chiffre de Z_λ.

Montrer, pour tout $k \in [\![1, 9]\!]$: $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big(\,[C_\lambda = k]\,\big) = \log\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.

Cette loi limite obtenue pour le premier chiffre de Z_λ est appelée *loi de Benford.*

Démonstration.
Soit $\lambda > 0$.

- On rappelle : $Z_\lambda(\Omega) = [1, +\infty[$. On en déduit :

$$\begin{array}{rcl} C_\lambda(\Omega) & = & \big(\alpha(Z_\lambda)\big)(\Omega) \ = \ \alpha\big(Z_\lambda(\Omega)\big) \\ & = & \alpha\big([1, +\infty[\big) \\ & = & [\![1, 9]\!] \end{array}$$

$$\boxed{\text{Et ainsi : } C_\lambda(\Omega) = [\![1, 9]\!].}$$

- Soit $k \in [\![1,9]\!]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([C_\lambda = k]\big) &= \mathbb{P}\big([\ \alpha(Z_\lambda) = k\ ]\big) \\
&= \mathbb{P}\big(\big[\ \log(k) \ \leqslant\ \big\{\log(Z_\lambda)\big\} \ <\ \log(k+1)\ \big]\big) && \textit{(d'après la question précédente)} \\
&= \mathbb{P}\big(\big[\ \log(k) \ \leqslant\ \big\{X_\lambda\big\} \ <\ \log(k+1)\ \big]\big) \\
&= \mathbb{P}\big([\ \log(k) \ \leqslant\ Y_\lambda \ <\ \log(k+1)\ ]\big) \\
&\underset{\lambda \to 0^+}{\longrightarrow} \mathbb{P}\big([\ \log(k) \ \leqslant\ Y \ <\ \log(k+1)\ ]\big) && \textit{(d'après la question } \textbf{\textit{8.b)}} \textit{ avec } Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1])\textit{)}
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big([\ \log(k) \ \leqslant\ Y \ <\ \log(k+1)\ ]\big) &= F_Y\big(\log(k+1)\big) - F_Y\big(\log(k)\big) && \textit{(car } Y \textit{ est une v.a.r. à densité)} \\
&= \log(k+1) - \log(k) && \textit{(car } \log(k+1) \in [0,1] \textit{ et } \log(k) \in [0,1]\textit{)} \\
&= \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Finalement, on a bien : } \forall k \in [\![1,9]\!] : \ \lim_{\lambda \to 0^+} \mathbb{P}\big([C_\lambda = k]\big) = \log\left(1 + \frac{1}{k}\right).}$$

□