Planche HEC : chaînes de Markov

Exercice avec préparation 1
Soit N un entier supérieur ou égal à 2.
On considère une *playlist* de N morceaux de musique, jouée en mode aléatoire avec les règles suivantes :

- Le premier morceau joué est le numéro 1.
- Si le morceau en train d'être joué est le numéro i, alors le numéro du prochain morceau est choisi aléatoirement et équiprobablement dans $[\![1, N]\!] \setminus \{i\}$ (autrement dit, on n'écoute pas deux fois de suite le même morceau).

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire égale au numéro du n^{e} morceau écouté. En particulier, $X_1 = 1$.

1. **Question de cours** :

a) Définition et caractérisation d'un état stable d'une chaîne de Markov.

b) Si la chaîne de Markov (X_n) converge en loi vers X et que π est un vecteur ligne représentant la loi de X, que peut-on dire de π ?

2. ***a)*** Expliquer pourquoi (X_n) est une chaîne de Markov homogène à N états.

b) Représenter le graphe probabiliste pour $N = 2$ et pour $N = 3$ puis donner la matrice de transition, notée M, dans le cas général.

c) Soit J la matrice de $\mathscr{M}_N(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Exprimer M en fonction de J et de la matrice identité I_N.

d) Calculer, pour tout entier $n \geqslant 1$, M^n. On exprimera le résultat comme une combinaison linéaire des matrices I_N et J.

e) Déduire de la question précédente une fonction **Python** `calcul_puis_M` qui prend en entrée deux paramètres n et N et renvoie en sortie la matrice M^n.

3. ***a)*** Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la loi de X_n. Préciser pour $n = 2$.
La suite (X_n) converge-t-elle en loi ?

b) Montrer que $E_1(M) = E_N(J)$ puis déterminer les états stables de la chaîne de Markov.

c) Commenter ces résultats en lien avec une possible réciproque à la question ***1.b)***.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont-elles indépendantes ?

b) Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_n^2)$ puis montrer que $\mathbb{E}(X_n X_{n+1}) = \dfrac{N(N+1)}{2(N-1)}\mathbb{E}(X_n) - \dfrac{1}{N-1}\mathbb{E}(X_n^2)$.

c) Calculer, en cas d'existence, $\lim\limits_{n \to +\infty} \operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1})$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1})$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. a) Soit $\pi \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbb{R})$. On dit que π est un état stable si

- $\pi M = \pi$ où M est la matrice de transition
- tous les coefficients de π sont positifs et leur somme est égale à 1 (π représente une loi de probabilité finie).

Caractérisation : π est un état stable si et seulement si

- ${}^t\pi$ est un vecteur propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre 1
- tous les coefficients de π sont positifs et leur somme est égale à 1.

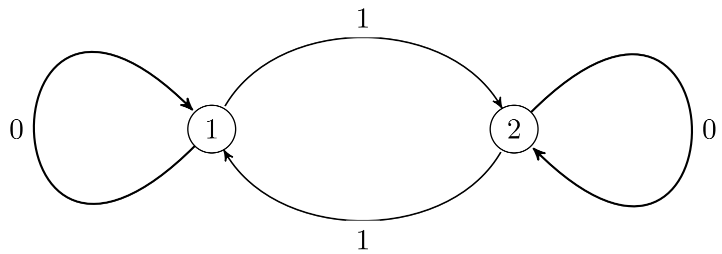
b) On peut alors affirmer que π est un état stable de la chaîne de Markov.

2. a)
- $X_1(\Omega) = \{1\}$, $X_2(\Omega) = [\![2, N]\!]$ et pour tout entier $n \geqslant 3$, $X_n(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(i, j) \in E^2$ et pour tout $(i_0, \ldots, i_{n-1}) \in E^n$, on a

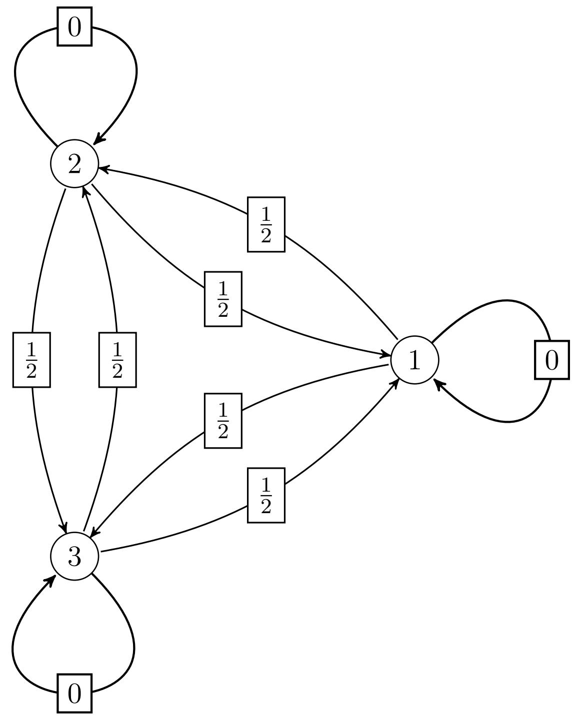
$$\mathbb{P}_{[X_n=i]\cap[X_{n-1}=i_{n-1}]\cap\cdots\cap[X_0=i_0]}([X_{n+1} = j]) = \mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j]) = \begin{cases} \frac{1}{N-1} & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

  donc (X_n) est une chaîne de Markov à N états.
- Enfin, la probabilité $\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1} = j])$ ne dépend pas de n donc cette chaîne de Markov est homogène.

b) Pour $N = 2$:



Pour $N = 3$:



La matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{N-1} \\ \frac{1}{N-1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{N-1} \\ \frac{1}{N-1} & \cdots & \cdots & \frac{1}{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

c) $M = \dfrac{1}{N-1}(J - I_N)$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les matrices I_N et J commutent.
On remarque que $J^2 = NJ$ et donc, par récurrence immédiate, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = N^{k-1}J$.
Par binôme de Newton,

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{(N-1)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k (-I_N)^{n-k} \\ &= \frac{1}{(N-1)^n} \left((-1)^n I_N + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^{k-1} \right) J \right) \\ &= \frac{1}{(N-1)^n} \left((-1)^n I_N + \frac{1}{N} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^{k} \right) J \right) \\ &= \frac{1}{(N-1)^n} \left((-1)^n I_N + \frac{1}{N} \left((N-1)^n - (-1)^n \right) J \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{(N-1)^n} I_N + \frac{1}{N} \left(1 - \frac{(-1)^n}{(N-1)^n} \right) J \end{aligned}$$

e) On propose la fonction suivante :

```
def calcul_puis_M(n, N):
    I = np.eye(N)
    J = np.ones([N,N])
    c = ((-1) ** n) / ((N - 1) ** n)
    return c * I + (1 / N) * (1 - c) * J
```

3. a) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, V_n le n^{e} état probabiliste de la chaîne de Markov. En particulier,

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \end{pmatrix}$$

On démontre à l'aide de la formule des probabilités totales que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{n+1} = V_n M$$

Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$V_n = V_1 M^{n-1}$$

donc V_n est la première ligne de la matrice M^{n-1}.
Notons $u_n = \dfrac{1}{N}\left(1 - \dfrac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}}\right)$. On a alors

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}([X_n = k]) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + u_n & \text{si } k = 1 \\ u_n & \text{si } 2 \leqslant k \leqslant N \end{cases}$$

En particulier, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![2, N]\!])$.
Étude de la convergence en loi :

- Si $N = 2$: pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2}$$
$$\mathbb{P}([X_n = 2]) = \frac{1 - (-1)^{n-1}}{2}$$

les suites $(\mathbb{P}([X_n = 1]))_{n \geqslant 1}$ et $(\mathbb{P}([X_n = 2]))_{n \geqslant 1}$ n'admettent pas de limite donc (X_n) ne converge pas en loi.

- Si $N \geqslant 3$: pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}([X_n = k]) = \frac{1}{N}$$

donc $X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathscr{L}} X$ où $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$.

b) Soit $U \in \mathscr{M}_{N,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} U \in E_1(M) &\iff MU = U \\ &\iff \frac{1}{N-1}(J - I_N)U = U \\ &\iff (J - I_N)U = (N-1)U \\ &\iff JU = NU \\ &\iff U \in E_N(J) \end{aligned}$$

Or, il est clair que $\mathrm{rg}(J) = 1$ donc $\dim(E_0(J)) = N - 1$ par théorème du rang. On en déduit que $\dim(E_N(J)) \leqslant 1$. De plus,

$$J \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ \vdots \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $\dim(E_N(J)) \geqslant 1$ et finalement

$$E_N(J) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

D'autre part, M est symétrique donc $\pi \in \mathscr{M}_{1,N}(\mathbb{R})$ est un état stable de la chaîne de Markov si et seulement si

- ${}^t\pi$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 1
- tous les coefficients de π sont positifs et leur somme est égale à 1.

Il y a un unique vecteur qui vérifie ces deux conditions et il s'agit du vecteur $\pi = (\frac{1}{N} \cdots\cdots \frac{1}{N})$.

c) Le cas $N = 2$ fournit un contre exemple : il existe un état stable mais la suite (X_n) ne converge pas en loi.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) • X_1 est constante donc X_1 et X_2 sont indépendantes

- On suppose maintenant que $n \geqslant 2$. On sépare deux cas.

× Cas $N = 2$. On a vu que

$$\mathbb{P}([X_n = 1]) = \frac{1 + (-1)^{n-1}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

On en déduit que les événements $[X_n = 1]$ et $[X_{n+1} = 1]$ sont indépendants, puis, par passages aux complémentaires successifs, que

$$\begin{aligned} &[X_n = 1] \text{ et } [X_{n+1} = 2] \text{ sont indépendants} \\ &[X_n = 2] \text{ et } [X_{n+1} = 1] \text{ sont indépendants} \\ &[X_n = 2] \text{ et } [X_{n+1} = 2] \text{ sont indépendants} \end{aligned}$$

donc X_n et X_{n+1} sont indépendantes.

× Cas $N \geqslant 3$. Alors on a

$$[X_n = 2] \cap [X_{n+1} = 2] = \varnothing$$

or

$$\mathbb{P}([X_n = 2]) \neq 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_{n+1} = 2]) \neq 0$$

donc X_n et X_{n+1} ne sont pas indépendantes.

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n) &= \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}([X_n = k]) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + u_n + \sum_{k=2}^{N} k u_n \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + u_n \sum_{k=1}^{N} k \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + u_n \frac{N(N+1)}{2} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + \frac{N+1}{2}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

puis, de manière similaire,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_n^2) &= \sum_{k=1}^{N} k^2\mathbb{P}([X_n = k]) \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + u_n + \sum_{k=2}^{N} k^2 u_n \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + u_n \sum_{k=1}^{N} k^2 \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + u_n \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}} + \frac{(N+1)(2N+1)}{6}\left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{(N-1)^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_nX_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} ij\mathbb{P}([X_n=i]\cap[X_{n+1}=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} ij\mathbb{P}([X_n=i])\mathbb{P}_{[X_n=i]}([X_{n+1}=j]) \\
&= \sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}([X_n=i]) \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant N\\ j\neq i}} j\frac{1}{N-1} \\
&= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}([X_n=i])\left(\left(\sum_{j=1}^{N} j\right)-i\right) \\
&= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}([X_n=i])\left(\frac{N(N+1)}{2}-i\right) \\
&= \frac{N(N+1)}{2(N-1)}\sum_{i=1}^{N} i\mathbb{P}([X_n=i]) - \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} i^2\mathbb{P}([X_n=i]) \\
&= \frac{N(N+1)}{2(N-1)}\mathbb{E}(X_n) - \frac{1}{N-1}\mathbb{E}(X_n^2)
\end{aligned}$$

c) • Étude de $\lim\limits_{n\to+\infty} \operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1})$.

× Cas $N=2$. On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n et X_{n+1} sont indépendantes, donc

$$\operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1}) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

× Cas $N\geqslant 3$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1}) &= \frac{N(N+1)}{2(N-1)}\frac{N+1}{2} - \frac{1}{N-1}\frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2 \\
&= -\frac{N+1}{12}
\end{aligned}$$

• Étude de $\lim\limits_{N\to+\infty} \operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1})$.

× Cas $n=1$. On a vu que X_1 et X_2 sont indépendantes, donc

$$\lim_{N\to+\infty} \operatorname{Cov}(X_1, X_2) = 0$$

× Cas $n\geqslant 2$. On cherche un équivalent lorsque $N\to+\infty$. On remarque que

$$\mathbb{E}(X_n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}(X_n^2) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^2}{3}$$

donc

$$\operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1}) = \frac{N(N+1)}{2(N-1)}\mathbb{E}(X_n) - \frac{1}{N-1}\mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+1})$$

avec

$$\frac{N(N+1)}{2(N-1)}\mathbb{E}(X_n) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^2}{4}, \qquad \frac{1}{N-1}\mathbb{E}(X_n^2) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N}{3}, \qquad \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+1}) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^2}{4}$$

Il suit que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\operatorname{Cov}(X_n, X_{n+1})}{N^2} = \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{4} = 0$$

et que $\lim_{N\to+\infty} \dfrac{\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})}{N}$ est pour l'instant une forme indéterminée. Il faut donc être plus subtil et calculer un développement asymptotique des termes $\dfrac{N(N+1)}{2(N-1)}\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+1})$.

Après calculs, on obtient pour $n \geqslant 3$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= \frac{N}{2} + \frac{1}{2} + \underset{N\to+\infty}{o}(1) \\
\mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+1}) &= \frac{N^2}{4} + \frac{N}{2} + \underset{N\to+\infty}{o}(N) \\
\frac{N(N+1)}{2(N-1)}\mathbb{E}(X_n) &= \frac{N^2}{4} + \frac{3N}{4} + \underset{N\to+\infty}{o}(N)
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{N(N+1)}{2(N-1)}\mathbb{E}(X_n) - \mathbb{E}(X_n)\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{N}{4} + \underset{N\to+\infty}{o}(N)$$

et finalement,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1})}{N} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$$

ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) \underset{N\to+\infty}{\sim} -\frac{N}{12} \qquad \text{puis} \qquad \lim_{N\to+\infty} \mathrm{Cov}(X_n, X_{n+1}) = -\infty$$

On laisse le cas $n = 2$ au lecteur ou à la lectrice acharné·e, cette dernière question se situant probablement déjà au delà de ce qui peut être attendu d'un·e candidat·e à l'oral d'HEC dans le temps imparti.