Planche HEC : étude d'une fonction de deux variables (1)

Exercice avec préparation 1

On pose, pour tout entier naturel n et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \qquad \text{et} \qquad F(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2\mathrm{e}^{-t^2}\, dt$$

1. **Cours :** Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Rappeler la définition d'un point critique de f, et donner une condition suffisante pour que f possède un extremum local en ce point.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.

3. ***a)*** Montrer que $I_0 = \sqrt{\pi}$.

b) Calculer I_1.

c) Déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n valable pour tout entier naturel n.

d) Calculer I_{2p+1} et I_{2p} pour tout entier naturel p.

4. ***a)*** Calculer $F(x,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

b) Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

5. Calculer les points critiques de F et déterminer leur nature.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Soit $(x, y) \in U$. On dit que (x, y) est un point critique de f si : $\left\{\begin{array}{ll} \partial_1(f)(x,y) & = 0 \\ \partial_2(f)(x,y) & = 0 \end{array}\right.$.

Soit (x, y) un point critique. Si la hessienne de f au point (x, y) possède deux valeurs propres (éventuellement égales) non nulles et de même signe, alors f admet un extremum local en (x, y).

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc l'intégrale I_n est impropre en $+\infty$ et en $-\infty$. L'intégrande étant paire ou impaire (selon la parité de n), la convergence de I_n est équivalente à la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t^2}\, dt$.

× Les fonctions $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t^2}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sont positives sur $[1, +\infty[$.

× Par croissance comparées : $t^n \mathrm{e}^{-t^2} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

× L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge par critère de Riemann.

$$\boxed{\text{Par critère de comparaison : } I_n \text{ converge.}}$$

3. *a)* Le changement de variable affine $t = \dfrac{u}{\sqrt{2}}$ donne :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{\pi}\, \mathbb{E}(Z^0) && \textit{(où } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)\textit{)} \\ &= \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien : } I_0 = \sqrt{\pi}.}$$

b) L'intégrale I_1 converge et l'intégrande $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est impaire.

$$\boxed{\text{Par argument de parité : } I_1 = 0.}$$

c) Soit $(A, B) \in \mathbb{R}^2$, $A \leqslant B$. On procède par intégration par parties (valide car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A, B]$) :

$$\left|\begin{array}{ll} u'(t) = t^n & u(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t^2} & v'(t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \int_A^B t^n \mathrm{e}^{-t^2}\, dt &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \mathrm{e}^{-t^2} \right]_A^B - \int_A^B -\frac{2}{n+1} t^{n+2} \mathrm{e}^{-t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{n+1}\left(B^{n+1}\mathrm{e}^{-B^2} - A^{n+1}\mathrm{e}^{-A^2} \right) + \frac{2}{n+1} \int_A^B t^{n+2}\mathrm{e}^{-t^2}\, dt \end{aligned}$$

Or : $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} x^{n+1}\mathrm{e}^{-x^2} = 0$. Ainsi, en faisant tendre A vers $-\infty$ et B vers $+\infty$, on obtient :

$$\boxed{I_n = \frac{2}{n+1} I_{n+2} \text{ ou encore } I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.}$$

d) • Par récurrence immédiate, pour tout entier naturel p :

$$\boxed{I_{2p+1} = 0.}$$

• En itérant la formule $I_{2p+2} = \dfrac{2p+1}{2} I_{2p}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
I_{2p+2} &= \frac{2p+1}{2}\frac{2p-1}{2}\dots\frac{1}{2}I_0 \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p}(2k+1)}{\prod\limits_{k=0}^{p} 2} I_0 \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p}(2k+1)}{2^{p+1}} I_0 \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p}(2k+1)}{2^{p+1}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} 2k}{\prod\limits_{k=1}^{p} 2k} I_0 \\
&= \frac{\prod\limits_{k=0}^{p}(2k+1)}{2^{p+1}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{p} 2k}{2^p \prod\limits_{k=1}^{p} k} I_0 \\
&= \frac{(2p+1)!}{2^{2p+1}p!} I_0 \\
&= \frac{(2p+2)!}{2^{2p+2}(p+1)!} I_0 \qquad \textit{(en multipliant en haut et en bas par } 2p+2\textit{)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On peut alors conclure que, pour tout entier naturel } p : I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}p!}\sqrt{\pi}.}$$

Commentaire

Cette formule peut se vérifier par récurrence.

4. a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par linéarité de l'intégrale (toutes les intégrales en présence convergent d'après la question **2**) :

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2(t-y)^2 \mathrm{e}^{-t^2}\ dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(t^4 - 2(x+y)t^3 + (x^2+4xy+y^2)t^2 - 2(xy^2+x^2y)t + x^2y^2\right) \mathrm{e}^{-t^2}\ dt \\
&= I_4 - 2(x+y)I_3 + (x^2+4xy+y^2)I_2 - 2(xy^2+x^2y)I_1 + x^2y^2 I_0 \\
&= I_4 + (x^2+4xy+y^2)I_2 + x^2y^2 I_0 \\
&= \sqrt{\pi}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(x^2+4xy+y^2) + x^2y^2\right)
\end{aligned}$$

b) La fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ en tant que fonction polynomiale.

5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Tout d'abord :

$$\partial_1(F)(x, y) = \sqrt{\pi}\left(x + 2y + 2xy^2\right)$$
$$\partial_2(F)(x, y) = \sqrt{\pi}\left(y + 2x + 2yx^2\right)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
& (x, y) \text{ est un point critique de } F \\
\iff & \begin{cases} x + 2y + 2xy^2 &= 0 \\ y + 2x + 2yx^2 &= 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x + 2y + 2xy^2 &= 0 \\ y - x + 2(x-y) + 2xy(x-y) &= 0 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\
\iff & \begin{cases} x + 2y + 2xy^2 &= 0 \\ (x-y)(1+2xy) &= 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x(3+2x^2) &= 0 \\ y &= x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 2y + 2xy^2 &= 0 \\ xy &= -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x &= 0 \\ y &= x \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 + 2xy + 2(xy)^2 &= 0 \\ xy &= -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \textit{(multiplication par } x \neq 0\textit{)} \\
\iff & \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 &= \frac{1}{2} \\ xy &= -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \textit{(remplacement de } xy \textit{ par } -\tfrac{1}{2}\textit{)} \\
\iff & \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ xy &= -\frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}
\end{aligned}$$

Commentaire

On remarque une symétrie entre les deux premières équations : les termes de gauche sont égaux lorsque $y = x$. Ainsi, la différence des deux termes doit s'annuler lorsque $y = x$ et cette information nous permet de prévoir une factorisation par $x - y$ après avoir fait l'opération sur les lignes.

La fonction F admet donc trois points critiques dans $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
De plus,

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1}(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\left(1 + 2y^2\right) \\
\partial^2_{2,1}(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\,(2 + 4xy) \\
\partial^2_{1,2}(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\,(2 + 4xy) \\
\partial^2_{2,2}(F)(x,y) &= \sqrt{\pi}\left(1 + 2x^2\right)
\end{aligned}$$

- La hessienne de F au point $(0,0)$ est la matrice :

  $$H = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} & 2\sqrt{\pi} \\ 2\sqrt{\pi} & \sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

  Après résolution de l'équation $\det(H - \lambda I_2) = 0$ (d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$), on trouve que les valeurs propres de cette matrice sont :

  $$\lambda_1 = 3\sqrt{\pi}, \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\pi}$$

  Elles sont non nulles et de signes opposés, donc le point $(0,0)$ est un point selle.
- La hessienne de F aux points $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ est la matrice :

  $$H = \begin{pmatrix} 2\sqrt{\pi} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{\pi} \end{pmatrix}$$

  qui est diagonale. Les valeurs propres de cette matrice sont :

  $$\lambda_1 = \lambda_2 = 2\sqrt{\pi}$$

  Elles sont toutes les deux strictement positives, donc F admet un minimum local aux points $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. De plus, F prend la valeur $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ en ces deux points.