Planche HEC : étude d'une fonction de deux variables (2)

Exercice avec préparation 1
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = y^2 - x^2y + x^2.$$

On note $C = [-1,1] \times [-1,1]$, une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$.

1. Cours : Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
Rappeler les conditions suffisantes pour que (x_0, y_0) soit un minimum local pour g.

2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur C.

3. Etudier la nature du point critique de f qui se trouve dans C.

4. Déterminer le minimum et le maximum de f sur C.

5. Soit $\lambda > 1$. On s'intéresse à la ligne de niveau λ, notée L_λ, de la fonction f.

a) Déterminer deux fonctions φ_1 et φ_2 définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_1(x)\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi_2(x)\}$$

b) Ecrire un code **Python** qui réalise le tracé des lignes de niveau L_λ pour $-4 \leqslant x \leqslant 4$ et $\lambda \in \{1,01; 1,2; 2,2; 3,2; 4,2\}$.

Réponses de l'exercice avec préparation 1 :

1. Si (x_0, y_0) est un point critique de g et si les valeurs propres de la hessienne de g au point (x_0, y_0) sont toutes les deux strictement positives, alors (x_0, y_0) est un minimum local pour g.

2. L'ensemble C est fermé et borné. De plus, la fonction f est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier f est continue sur C. On en déduit que f est bornée et atteint ses bornes sur C. Autrement dit, f admet un maximum et un minimum sur C.

3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
\partial_1(f)(x,y) &= -2xy + 2x = 2x(1-y) \\
\partial_2(f)(x,y) &= 2y - x^2
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ est un point critique de } f &\iff \begin{cases} 2x(1-y) &= 0 \\ 2y - x^2 &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= 0 \\ 2y - x^2 &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= 1 \\ 2y - x^2 &= 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= 1 \\ x^2 &= 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= 1 \\ x &= \sqrt{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y &= 1 \\ x &= -\sqrt{2} \end{cases}
\end{aligned}$$

La fonction f admet donc trois points critiques dans $\mathbb{R}^2$: $(0,0)$, $(\sqrt{2}, 1)$ et $(-\sqrt{2}, 1)$. Seul le point $(0,0)$ se trouve dans C.
De plus,

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1}(f)(x,y) &= 2 - 2y \\
\partial^2_{2,1}(f)(x,y) &= -2x \\
\partial^2_{1,2}(f)(x,y) &= -2x \\
\partial^2_{2,2}(f)(x,y) &= 2
\end{aligned}$$

Ainsi, la hessienne de f au point $(0,0)$ est la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est diagonale donc ses valeurs propres sont exactement ses coefficients diagonaux. On en déduit que les valeurs propres de H sont toutes les deux strictement positives et donc $(0,0)$ est un minimum local.

4. • Remarquons que $f(0,0) = 0$. De plus, pour tout $(x,y) \in C$,

$$\begin{aligned}
x^2 y &\leqslant \left|x^2 y\right| \\
&= |x|^2 \, |y| \\
&\leqslant |x| \, |y| && \textit{(car } |x| \in [0,1] \textit{ donc } |x|^2 \leqslant |x|\textit{)} \\
&\leqslant \frac{|x|^2 + |y|^2}{2} && (*) \\
&= \frac{x^2 + y^2}{2}
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité $(*)$ en remarquant que $(|x| - |y|)^2 \geqslant 0$ et en développant cette expression (identité remarquable).

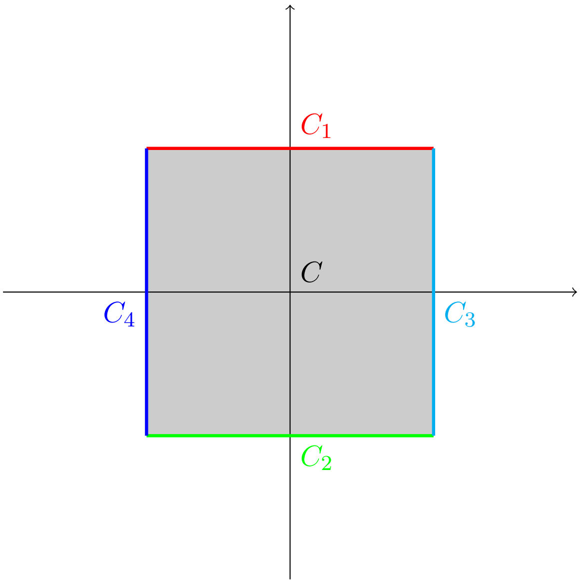
Puisque $\dfrac{x^2+y^2}{2} \leqslant x^2 + y^2$, on en déduit que, pour tout $(x,y) \in C$, $f(x,y) \geqslant 0 = f(0,0)$.

$$\boxed{\text{Le point } (0,0) \text{ est un minimum global de } f \text{ sur } C \text{ et } \min_{(x,y)\in C} f(x,y) = 0.}$$

Commentaire

Ce n'est pas un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$ car $f(3,2) = -5 < 0 = f(0,0)$.

- Déterminons maintenant le maximum de f sur C. Il est nécessairement atteint sur un bord de C (sinon on aurait trouvé à la question *3* un point critique dans l'intérieur de C qui est un maximum local).
  On étudie donc la fonction f en restriction à chacun des bords de C.



  × Sur le bord $C_1 = [-1,1] \times \{1\}$, $f(x,y) = f(x,1) = 1$, la fonction f est donc constante et $\max\limits_{(x,y)\in C_1} f(x,y) = 1$.

  × Sur le bord $C_2 = [-1,1] \times \{-1\}$, $f(x,y) = f(x,-1) = 1 + 2x^2$. La fonction $h : x \mapsto 1 + 2x^2$ définie sur $[-1,1]$ atteint son maximum en -1 et en 1. Ainsi, $\max\limits_{(x,y)\in C_2} f(x,y) = 3$.

  × Sur le bord $C_3 = \{1\} \times [-1,1]$, $f(x,y) = f(1,y) = y^2 - y + 1$. L'étude (simple) de la fonction $h : y \mapsto y^2 - y + 1$ définie sur $[-1,1]$ donne son tableau de variations :

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
Signe de $h'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de h	3	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1

  Ainsi, $\max\limits_{(x,y)\in C_3} f(x,y) = 3$.

  × L'étude sur le bord $C_4 = \{-1\} \times [-1,1]$ est identique à celle effectuée sur le bord C_3.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ atteint son maximum sur } C \text{ aux points } (-1,-1) \text{ et } (1,-1)\text{, et celui-ci vaut } 3.}$$

Commentaire

L'étude de f sur les bords de C permet aussi de montrer que le minimum global est atteint uniquement en $(0,0)$. En effet, ce minimum global étant aussi un minimum local, il est atteint soit en $(0,0)$ (l'unique point critique dans l'intérieur de C) soit en un point du bord de C mais on peut constater que f ne prend que des valeurs strictement positives sur le bord de C.

5. Rappelons que $L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = \lambda\}$.

a) Soit $\lambda > 1$ fixé. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Il s'agit d'exprimer y en fonction de x dans l'équation $y^2 - x^2y + x^2 - \lambda = 0$. On reconnaît un trinôme du second degré en y (où x et λ sont des paramètres).
Son discriminant est $\Delta_y = x^4 - 4(x^2 - \lambda) = x^4 - 4x^2 + 4\lambda$. On cherche le signe de Δ_y.
On remarque que Δ_y est un trinôme du second degré en x^2 (où λ est un paramètre).
Son discriminant est $\Delta_x = 16 - 16\lambda = 16(1-\lambda) < 0$ par hypothèse sur λ.
On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta_y > 0$.
L'équation $y^2 - x^2y + x^2 - \lambda = 0$ admet donc deux solutions :

$$y_1 = \frac{x^2 + \sqrt{\Delta_y}}{2} \qquad \text{et} \qquad y_2 = \frac{x^2 - \sqrt{\Delta_y}}{2}$$

Les fonctions

$$\varphi_1 : x \mapsto \frac{x^2 + \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : x \mapsto \frac{x^2 - \sqrt{x^4 - 4(x^2-\lambda)}}{2}$$

conviennent.

b) On propose le code **Python** suivant, qui trace de la même couleur les deux « branches » d'une même ligne de niveau. On utilise la notation `la` pour désigner le paramètre λ.

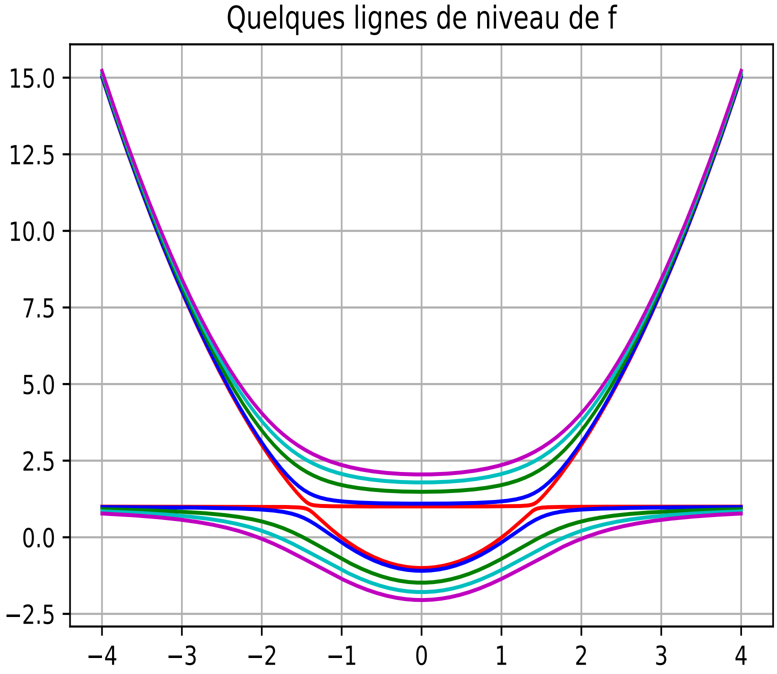
```
def phi1(x, la):
    return (1/2) * (x**2 + np.sqrt(x**4-4*(x**2 - la)))

def phi2(x, la):
    return (1/2) * (x**2 - np.sqrt(x**4-4*(x**2 - la)))

liste_la = [1.01, 1.2, 2.2, 3.2, 4.2]
abscisse = np.linspace(-4,4,1000)
liste_couleur = ['r', 'b', 'g', 'c', 'm']
n = len(liste_la)

for i in range(n):
    ordonnee1 = [phi1(x, liste_la[i]) for x in abscisse]
    ordonnee2 = [phi2(x, liste_la[i]) for x in abscisse]
    plt.plot(abscisse, ordonnee1, liste_couleur[i])
    plt.plot(abscisse, ordonnee2, liste_couleur[i])
plt.grid()
plt.show()
```

L'éxecution de ce code produit la figure suivante :


Quelques lignes de niveau de f
15.0
12.5
10.0
7.5
5.0
2.5
0.0
−2.5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4